Tome 20 — N° 4 — Avril 1959

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

L'AGITATION THERMIQUE DES ATOMES DANS LE MILIEU CRISTALLIN (Seconde partie)

Par J. LAVAL,

Collège de France, Paris.

Résumé. — La fréquence d'une oscillation fondamentale varie avec l'amplitude de l'agitation thermique. Les oscillations secondaires sont de fréquences $|\nu_1 \pm \nu_2|$; $|\nu_1 \pm \nu_2 \pm \nu_3|$, ... ; ν_1, ν_2, ν_3, ..., étant les fréquences des oscillations fondamentales. Elles prennent des amplitudes proportionnelles aux produits des amplitudes des oscillations fondamentales.

Abstract. — The frequency of a fundamental oscillation varies with the amplitude of the thermal agitation. Secondary oscillations have the frequencies $|\nu_1 \pm \nu_2|$; $|\nu_1 \pm \nu_2 \pm \nu_3|$, ... ; ν_1, ν_2, ν_3, ..., being the frequencies of fundamental oscillations. They take amplitudes proportional to the products of the amplitudes of the fundamental oscillations.

V. Seconde analyse.

En seconde analyse (équations 37) les oscillations fondamentales sont déterminées par les équations

$$\mu_j\, \ddot{u}_1 \overset{m}{\underset{\alpha,S\tau}{j}} + \sum_{pk\beta} C^{\,m-p}_{\substack{j\;\;k\\ \alpha\;\;\beta}}\, u_1{}^{p\beta}_{k}{}_{,S\tau} = f_3 \overset{m}{\underset{\alpha,S\tau}{j}}. \tag{39}$$

A. **Seconde opération** (1). — Les forces élémentaires, constantes pendant des temps limités, comprises dans la force $\varphi_2 \overset{m}{\underset{\alpha}{j}}$ (32), sont de deux sortes

$$f_{\theta 2} \overset{m}{\underset{\alpha,S\tau}{j}} = -\frac{(A_{S\tau})^2}{4} \sum_{pq} \sum_{ql} \sum_{\beta\gamma} D^{\,m\,p\,q}_{\substack{j\,k\,l\\ \alpha\beta\gamma}}\, c^{k\beta}{}_{,S\tau}\, c^{l\gamma}{}_{,S\tau}$$

$$\times \cos 2\pi[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) - \varphi_{k\beta,S\tau} + \varphi_{l\gamma,S\tau}] \tag{40}$$

et

$$f_{v2} \overset{m}{\underset{\alpha\,(S\tau,-S\tau)}{j}} = f_{v2} \overset{m}{\underset{\alpha\,(-S\tau,S\tau)}{j}}$$

$$= -\frac{A_{S\tau}\, A_{-S\tau}}{4} \sum_{pq} \sum_{ql} \sum_{\beta\gamma} D^{\,m\,p\,q}_{\substack{j\,k\,l\\ \alpha\beta\gamma}}\, c^{k\beta}{}_{,S\tau}\, c^{l\gamma}{}_{S\tau}$$

$$\times \cos 2\pi[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) - \varphi_{k\beta,S\tau} - \varphi_{l\gamma,S\tau} + \theta_{-S\tau} - \theta_{S\tau}]. \tag{41}$$

(1) Rappelons que la première opération qui constitue la première analyse consiste en la résolution des équations séculaires (27), obtenues en faisant état de forces de rappel conformes à la loi de Hooke.

Développée par une seule oscillation fondamentale $S\tau$, toute force $f_{\theta 2} \overset{m}{\underset{\alpha,S\tau}{j}}$ (40) se répète sur tous les atomes en même position dans le motif cristallin : $f_{\theta 2} \overset{m}{\underset{\alpha,S\tau}{j}} = f_{\theta 2}{}^{j}_{\alpha,S\tau}$. Son intensité augmente ou diminue chaque fois que l'oscillation $S\tau$ gagne ou perd un quantum d'énergie $h\nu_{S\tau}$. Mais ces variations d'intensité diminuent, en grandeur relative, quand la température s'élève. Aux moyennes et aux hautes températures les forces $f_{\theta 2} \overset{m}{\underset{\alpha,S\tau}{j}}$ restent sensiblement constantes au cours du temps.

Chaque force $f_{v2} \overset{m}{\underset{\alpha\,(S\tau,-S\tau)}{j}}$ (41) est produite par deux oscillations fondamentales $S\tau$ et $-S\tau$, de même fréquence : $\nu_{-S\tau} = \nu_{S\tau}$, mais pilotées par deux vecteurs d'onde, $\boldsymbol{S}$ et $-\boldsymbol{S}$, égaux et opposés (29-30). En conséquence, les forces $f_{v2} \overset{m}{\underset{\alpha\,(S\tau,-S\tau)}{j}}$, développées par le même couple d'oscillations fondamentales, $S\tau$ et $-S\tau$, prennent des intensités différentes sur les différents atomes : elles varient avec $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{j}$.

Toute oscillation fondamentale $S\tau$ change de phase temporelle, $2\pi\theta_{S\tau}$, à chaque fois qu'elle prend ou cède un quantum d'énergie $h\nu_{S\tau}$. De la sorte, les deux phases $\theta_{S\tau}$ et $\theta_{-S\tau}$ varient. Et leurs variations étant indépendantes, la différence $2\pi(\theta_{-S\tau} - \theta_{S\tau})$

prend uniformément au cours du temps toutes les grandeurs entre 0 et 2π. Donc les forces $f_{v2\,\alpha\,(S\tau,-S\tau)}^{\;m\,j}$ ($s = 1, 2, \ldots, N$; $\tau = 1, 2, \ldots, 3g$) sont nulles en moyenne dans le temps. Et comme leurs phases temporelles $2\pi(\theta_{-S\tau} - \theta_{S\tau})$ oscillent en outre, indépendamment les unes des autres, leur résultante,

$$f_{v2\,\alpha,S\tau}^{\;m\,j} = \frac{1}{2}\sum_{S\tau} f_{v2\,\alpha(S\tau,-S\tau)}^{\;m\,j},$$

reste sensiblement nulle à tout instant. Ainsi, les forces $f_{v2\,\alpha\,(S\tau,-S\tau)}^{\;m\,j}$ n'apportent pas de composantes permanentes aux tensions thermiques. Je n'en ferai donc plus état, ni de toutes les forces semblables, développées par deux oscillations harmoniques de même fréquence et de vecteurs d'onde égaux et opposés, constantes pendant des durées variables mais nulles en moyenne dans le temps.

Soit $\varphi'^{\,m}_{2\,\alpha}{}^{j}(t)$ la force obtenue en retranchant de la force $\varphi_{2\,\alpha}^{\,m\,j}$ (32) toutes les forces élémentaires $f_{\theta 2\,\alpha,S\tau}^{\;m\,j}$ et $f_{v2\,\alpha\,(S\tau,-S\tau)}^{\;m\,j}$ constantes pendant des temps limités.

Les équations

$$\mu_j\, \ddot{u}_{2\,\alpha}^{\,m\,j} + C_{\alpha\;\beta}^{\,m-p}{}_{j\;k}\, v_{;k}^{p\beta} = \varphi'^{\,m}_{2\,\alpha}{}^{j}(t) \qquad (42)$$

admettent la solution

$$u_{2\,\alpha}^{\,m\,j} = \frac{1}{2}\sum_{S\tau}\sum_{S'\tau'} u_{2\,\alpha,S\tau\pm S'\tau'}^{\,m\,j} \qquad (43)$$

où

$$u_{2\,j}^{\,m\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'} = u_{2\,j}^{\,m\alpha}{}_{,S'\tau'\pm S\tau}$$

$$= \frac{1}{4} A_{S\tau} A_{S'\tau'}\, \mu/\sqrt{\mu_j}$$

$$\times \Big[\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'} \exp . i2\pi[(\nu_{S\tau}\pm\nu_{S'\tau'})\, t$$

$$+ \theta_{S\tau}\pm\theta_{S'\tau'} - (\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}')\, \boldsymbol{m}]$$

$$+ \overset{*}{\zeta}{}^{j\alpha}{}_{S\tau\pm S'\tau'} \exp - i2\pi[(\nu_{S\tau}\pm\nu_{S'\tau'})\, t$$

$$+ \theta_{S\tau}\pm\theta_{S'\tau'} - (\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}')\, \boldsymbol{m}]\Big].$$

$$= A_{S\tau} A_{S'\tau'}\, c^{j\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'}$$

$$\times \cos 2\pi[(\nu_{S\tau}\pm\nu_{S'\tau'})\, t$$

$$+ \theta_{S\tau\pm S'\tau'} + \varphi_{j\alpha,S\tau\pm S'\tau'} - (\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}')\, \boldsymbol{m}] ;$$

$$c^{j\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'} = \frac{\mu}{2\sqrt{\mu_j}}\, \rho^{j\alpha}{}_{S\tau\pm S'\tau'} \qquad (44)$$

$\rho^{j\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'}$ est le module et $2\pi(\varphi_{j\alpha,S\tau\pm S'\tau'})$ l'argument de $\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'}$.

Les coordonnées vectorielles $\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau\pm S'\tau'}$ ($j = 1, 2, \ldots, g$; $\alpha = 1, 2, 3$) sont déterminées par les équations séculaires :

$$(\omega_{,S\tau} + \omega_{S'\tau'})^2\, \zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau+S'\tau'} - \sum_{k\beta} \Gamma^{j\,k}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}')\, \zeta^{k\beta}{}_{,S\tau+S'\tau'}$$

$$= \sum_{kl}\sum_{\beta\gamma}\Big[\sum_{pq} \frac{D^{\,mpq}_{\;j\,k\,l\;\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\mu_j\,\mu_k\,\mu_l}} \exp . i2\pi\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{p})$$

$$\exp . i2\pi\, \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})\Big]\, \zeta^{k\beta}{}_{,S\tau}\, \zeta^{l\gamma}{}_{,S'\tau'} ;$$

$$(\omega_{,S\tau} - \omega_{,S'\tau'})^2\, \zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau-S'\tau'} - \sum_{k\beta} \Gamma^{j\,k}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}')\, \zeta^{k\beta}{}_{,S\tau-S'\tau'}$$

$$= \sum_{kl}\sum_{\beta\gamma}\Big[\sum_{pq} \frac{D^{\,mpq}_{\;j\,k\,l\;\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\mu_j\,\mu_k\,\mu_l}} \exp . i2\pi\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{p})$$

$$\exp . -i2\pi\, \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})\Big]\, \zeta^{k\beta}{}_{,S\tau}\, \overset{*}{\zeta}{}^{l\gamma}{}_{,S'\tau'}$$

$$j, k, l = 1, 2, \ldots, g\ ;\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3\ ;\ \omega = 2\pi\nu. \qquad (45)$$

Les fréquences $\nu_{S\tau}$ prises en compte dans les équations (45) sont celles qui sont déterminées par les équations de d'Alembert (39) de la seconde analyse. A vecteur d'onde $\boldsymbol{S}$ égal, elles diffèrent des fréquences $\nu_{S\tau}$ données par les équations séculaires (27) de la première analyse. Je suppose que les vecteurs d'ondes fondamentaux, $\boldsymbol{S}$, sont déterminés. De la sorte, les fréquences $\nu_{S\tau}$ données par les équations (27) et par les équations (39) forment deux suites discrètes qui sont distinctes. La probabilité d'une égalité

$$|\omega_{,S\tau} \pm \omega_{,S'\tau'}| = \omega_{,S\pm S',\tau''}$$

$$\tau, \tau', \tau'' = 1, 2, \ldots, 3g \qquad (46)$$

est nulle ou infime. La matrice

$$(\omega_{,S\tau} \pm \omega_{,S'\tau'})^2\, I - \Gamma(\mathrm{S}\pm\mathrm{S}')$$

est toujours, ou presque toujours régulière (²). Posons

$$G_{,S\tau\pm S'\tau'} = [(\omega_{,S\tau} \pm \omega_{,S'\tau'})^2\, I - \Gamma(\mathrm{S}\pm\mathrm{S}')]^{-1}.$$

Nous avons (³) :

$$\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau+S'\tau'} = \sum_{v\eta} G^{\alpha\eta}_{j\,v,S\tau+S'\tau'} \sum_{kl}\sum_{\beta\gamma}\Big[\sum_{pq} \frac{D^{\,m\,pq}_{\;v\,k\,l\;\eta\beta\gamma}}{\sqrt{\mu_v\,\mu_k\,\mu_l}}$$

$$\times \exp . i2\pi\, \boldsymbol{S}(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{p}) \exp . i2\pi\, \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})\Big]\, \zeta^{k\beta}{}_{,S\tau}\, \zeta^{l\gamma}{}_{S'\tau'}.$$

(²) I est la matrice unité d'ordre $3g \times 3g$.

(³) Les oscillations secondaires que je définis sont celles qui sont produites par les oscillations fondamentales en états stationnaires.

Je suppose déterminées les fréquences $\nu_{S\tau}$ et, par conséquent, les énergies,

$$(n + 1/2)\, h\nu_{S\tau}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

des oscillations fondamentales en états stationnaires. Mais cela n'implique pas que les quantums d'énergie $h\nu_{S\tau}$ perdus ou gagnés par les oscillations fondamentales soient rigoureusement définis.

Les états stationnaires des oscillations fondamentales ne sont pas durables. La probabilité de l'existence d'une oscillation fondamentale $S\tau$ dans un état stationnaire donné — associé à l'énergie $(n + 1/2)\, h\nu_{S\tau}$ (n constant) — décroît au

Pour obtenir les coordonnées vectorielles $\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau-S'\tau'}$ il suffit de remplacer, dans l'expression précédente (47), $G^{\alpha\eta}_{j\nu,S\tau+S'\tau'}$ par $G^{\alpha\eta}_{j\nu,\tau-S'\tau'}$, $\boldsymbol{S}'$ par $-\boldsymbol{S}'$ et $\zeta^{l\gamma}{}_{S'\tau'}$ par $\overset{*}{\zeta}{}^{l\gamma}{}_{,S'\tau'}$ [4].

Notons que l'oscillation globale $u_{2\,j}^{\;m\alpha}$ (43) n'a pas de composantes $u_{2\,j}^{\;m\alpha}{}_{,S\tau-S\tau}$ et $u_{2\,j}^{\;m\alpha}{}_{,S\tau-(-S)\tau}$ et que l'amplitude des oscillations $u_{2\,j}^{\;m\alpha}{}_{,S\tau+S\tau}$ est deux fois plus petite que l'amplitude définie par l'expression (44).

Suivant la règle adoptée pour désigner les oscillations fondamentales, j'appellerai oscillation secondaire $S\tau \pm S'\tau'$ l'ensemble des oscillations de fréquence $|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'}|$ faites par tous les atomes du cristal. Cette définition admise, on trouve, pour $3\mathcal{N}$ oscillations fondamentales,

$$3\mathcal{N}(3\mathcal{N} - 1/2) \simeq 3\mathcal{N}^2$$

oscillations secondaires.

Les oscillations $u_{2\,j}^{\;m\alpha}{}_{S\tau\pm S'\tau'}$ (44) forment les premières composantes — celles qui sont de degré 2 — des oscillations secondaires $S\tau \pm S'\tau'$.

B. **Troisième opération.** — I. Développée en série, l'expression de la force $\varphi_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}}}$ (34) contient des termes qui comportent la fréquence $\nu_{S\tau}$. La force $f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$ est définie par la somme de tous ces termes :

$$f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau} = f_{3D\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau} + f_{3E\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}\,; \tag{48}$$

et, compte tenu des expressions (23), (44), et des relations (31) nous avons :

1°

$$f_{3D\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau} = -\frac{1}{2} A_{S\tau} \sum_{S'\tau'} \Big(\sum_{pq} \sum_{kl} \sum_{\beta\gamma} D^{mpq}_{\substack{jkl\\ \alpha\beta\gamma}} \mathcal{F}^{pq\;\beta\gamma}_{kl,S\tau,S'\tau'} \Big)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{pq\;\beta\gamma}_{kl,S\tau,S'\tau'} = {} & (A_{S'\tau'})^2\, c^{l\gamma}{}_{,S'\tau'} \\ & \times \Big[c^{k\beta}{}_{,S\tau+S'\tau'} \cos 2\pi[\nu_{S\tau}\, t + \theta_{S\tau} \\ & \qquad + \varphi_{k\beta,S\tau+S'\tau'} - \varphi_{l\gamma,S'\tau'} - \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}] \\ & + c^{k\beta}{}_{,S\tau-S'\tau'} \cos 2\pi[\nu_{S\tau}\, t + \theta_{S\tau} \\ & \qquad + \varphi_{k\beta,S\tau-S'\tau'} + \varphi_{l\gamma,S'\tau'} + \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) - \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}] \Big]. \end{aligned} \tag{49}$$

2°

$$\begin{aligned} f_{3E\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau} = -\frac{A_{S\tau}}{4} \sum_{S'\tau'} \Big[& \sum_{pk\beta} \Big(\sum_{qr} \sum_{ls} \sum_{\gamma\delta} E^{mpqr}_{\substack{jkls\\ \alpha\beta\gamma\delta}} \mathcal{F}^{qr\;\gamma\delta}_{ls,S'\tau'} \Big) \\ & \times c^{k\beta}{}_{,S\tau} \cos 2\pi(\nu_{S\tau}\, t + \theta_{S\tau} + \varphi_{k\beta,S\tau} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{p}) \Big] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{qr\;\gamma\delta}_{ls,S'\tau'} = {} & (A_{S'\tau'})^2\, c^{l\gamma}{}_{,S'\tau'}\, c^{s\delta}{}_{,S'\tau'} \\ & \times \cos 2\pi[\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) - \varphi_{l\gamma,S'\tau'} + \varphi_{s\delta,S'\tau'}]. \end{aligned} \tag{50}$$

Reportons ces expressions (48-49-50) des forces $f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$ dans les équations (39) et éliminons le temps, c'est-à-dire : divisons les deux membres de chaque équation par le facteur

$$\exp . i2\pi(\nu_{S\tau}\, t + \theta_{S\tau} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{m})$$

Nous obtenons les équations séculaires [5]

$$\omega^2 \zeta = (\Gamma(\boldsymbol{S}) + \Delta_3(\boldsymbol{S}))\, \zeta \tag{51}$$

cours du temps, suivant la loi exponentielle, comme la probabilité qu'a un atome de rester dans un état excité. Et, selon les relations d'incertitude (Heisenberg), tout quantum d'énergie $h\nu_{S\tau}$ cédé ou reçu par une oscillations fondamentale comporte, de ce fait, une indétermination $h\delta\nu_{S\tau}$. Cette indétermination affecte tous les échanges d'énergies par quantum $h\nu_{S\tau}$, en particulier, les échanges d'énergie entre les oscillations fondamentales. Ainsi, supposer les fréquences $\nu_{S\tau}$ déterminées par le champ de forces existant dans le milieu cristallin est une hypothèse qui n'exclut pas l'indétermination $h\delta\nu_{S\tau}$ envisagée par les théoriciens qui traitent de la propagation de la chaleur dans les cristaux [7-8].

En outre, attribuer aux oscillations fondamentales les énergies $(n + 1/2)\, h\nu_{S\tau}$, c'est supposer ces oscillations indépendantes les unes des autres. Les oscillations fondamentales, véritables (définies approximativement par les équations (39-58-...) sont liées entre elles par les forces $f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$, $f_{5\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$, ... Et si l'on recherche une expression plus précise de l'énergie thermique, par la méthode quantique des perturbations, on trouve des énergies de couplage entre les oscillations fondamentales qui s'ajoutent aux énergies propres $(n + 1/2)\, h\nu_{S\tau}$. En conséquence, même abstraction faite des relations d'incertitude, les échanges d'énergies entre les oscillations fondamentales ne se font pas exactement par quantum $h\nu_{S\tau}$.

(4) Les champs de force existant dans le milieu cristallin recèlent encore beaucoup d'inconnues et, pour quelque champ particulier, la probabilité de l'égalité (46) peut ne pas être nulle. Supposons cette égalité satisfaite et les vecteurs d'onde $\boldsymbol{S}$ conformes aux conditions cycliques donc égaux aux translations d'un réseau. En ce cas, la force élémentaire, périodique, $f_{2\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau\pm S'\tau'}$, développée par les deux oscillations fondamentales $S\tau$ et $S'\tau'$ a la fréquence,

$$\nu_{S''\tau''} = |\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'}|,$$

d'une autre oscillation fondamentale $S''\tau''$, pilotée par le vecteur d'onde $\pm\, (\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}')$; elle est une composante de la force de rappel qui entretient l'oscillation $S''\tau''$. Il convient donc de l'ajouter à la force $f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$ dans le second membre de l'équation (39).

(5) A partir de ce point, je ne suis plus la méthode classique de l'analyse mathématique. Je prends comme inconnues dans les équations (39) les coordonnées vectorielles $\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau}$ et les amplitudes $A_{S\tau}$ (24) de toutes les oscillations fondamentales, donc les coordonnées vectorielles et les amplitudes qui figurent dans les expressions des forces $f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$. Au contraire, la méthode classique consiste en la résolution des équations (39) où les forces $f_{3\,\overset{m}{\underset{\alpha}{j}},S\tau}$ sont déterminées par les coordonnées vectorielles $\zeta^{j\alpha}{}_{,S\tau}$ et les amplitudes $A_{S\tau}$ (24), données par les équations séculaires (27) de la première analyse. Ainsi définies, les équations (39) admettent la solution :

$$\begin{aligned} & A_{S\tau}\, c_{j\alpha,S\tau}\, \varkappa_{S\tau}\, t \cos 2\pi(\nu_{S\tau}\, t + \theta_{S\tau} + \varphi_{j\alpha,S\tau} + \Delta_{S\tau} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{m}) \\ & + A_{S\tau}\, b^{j\alpha}{}_{,S\tau} \cos 2\pi\, (\nu_{S\tau}\, t + \varphi'_{j\alpha,S\tau} + \theta_{S\tau} - \boldsymbol{S}\boldsymbol{m}) \end{aligned}$$

$$\varkappa_{S\tau}\, t \ll 1\,; \qquad b^{j\alpha}{}_{,S\tau} \ll c^{j\alpha}{}_{,S\tau}$$

$\varkappa_{S\tau}$ est un coefficient déterminé, et $2\pi\Delta_{S\tau}$ une phase déter-

où la matrice $\Delta_3(S)$, tient compte des forces de rappel $f_{3\,\alpha,S\tau}^{\;\;m}_{\;\;j}$ (48) :

$$\Delta_{3\,\alpha\beta}^{\;jk}(\boldsymbol{S}) = \sum_{S'\tau'} \left[(\overline{A_{S'\tau'}})^2 \left(\Delta_{D\,\alpha\beta,S+S',\tau'}^{\;jk} + \Delta_{D\,\alpha\beta,S-S',\tau'}^{\;jk} + \Delta_{E\,\alpha\beta,S,S',\tau'}^{\;jk} \right) \right]. \quad (52)$$

Il vient des expressions (48), (49) et (50)

$$\Delta_{D\,\alpha\beta,S+S',\tau'}^{\;jk} = \frac{\mu}{4} \sum_{\gamma\xi} \sum_{lw} \Bigg[\sum_{\delta\eta} \sum_{sv} \sum_{mqm'q'} \frac{D_{\alpha\delta\gamma}^{\;jsl\;\;mpq}}{\sqrt{\mu_j\,\mu_s\,\mu_l}} \exp.-i2\pi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{m}) \exp.-i2\pi \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \times G_{sv,S\tau+S'\tau'}^{\delta\eta} \frac{D_{\beta\eta\xi}^{\;kvw\;\;m'pq'}}{\sqrt{\mu_k\,\mu_v\,\mu_w}} \exp.\,i2\pi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{m}') \exp.\,i2\pi \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}') \Bigg] \overset{*}{\zeta}{}^{\gamma}_{l,S'\tau'}\, \zeta^{\xi}_{w,S'\tau'} \quad (53)$$

$$\Delta_{D\,\alpha\beta,S-S',\tau'}^{\;jk} = \frac{\mu}{4} \sum_{\gamma\xi} \Bigg[\sum_{\delta\eta} \sum_{slvw} \sum_{mqm'q'} \frac{D_{\alpha\delta\gamma}^{\;jsl\;\;mpq}}{\sqrt{\mu_j\,\mu_s\,\mu_l}} \exp.-i2\pi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{m}) \exp.\,i2\pi \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \times G_{sv,S\tau-S'\tau'}^{\delta\eta} \frac{D_{\beta\eta\xi}^{\;kvw\;\;m'pq'}}{\sqrt{\mu_k\,\mu_v\,\mu_w}} \exp.\,i2\pi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{m}') \exp.-i2\pi \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}') \Bigg] \zeta^{\gamma}_{l,S'\tau'}\, \overset{*}{\zeta}{}^{\xi}_{w,S'\tau'} \quad (54)$$

$$\Delta_{E\,\alpha\beta,S,S',\tau'}^{\;jk} = \frac{\mu}{8} \sum_{p} \Bigg[\sum_{qr} \sum_{ls} \sum_{\gamma\delta} \frac{E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\;jkls\;\;mpqr}}{\sqrt{\mu_j\,\mu_k\,\mu_l\,\mu_s}} \left[\overset{*}{\zeta}{}^{\gamma}_{l,S'\tau'}\, \zeta^{\delta}_{s,S'\tau'} \exp.\,i2\pi \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}) + \zeta^{\gamma}_{l,S'\tau'}\, \overset{*}{\zeta}{}^{\delta}_{s,S'\tau'} \exp.-i2\pi \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}) \right] \Bigg] \exp.\,i2\pi \boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{p}). \quad (55)$$

Au cours du temps, toute oscillation fondamentale, $S\tau$, perd ou gagne de l'énergie par quantum $h\nu_{S\tau}$. Mais à température constante l'agitation thermique d'un cristal conserve la même énergie : les quantums d'énergie perdus par des oscillations fondamentales sont repris par d'autres oscillations fondamentales. Ainsi, les carrés des amplitudes $A_{S\tau}$ (24) fluctuent, mais, à chaque instant, leurs fluctuations se compensent mutuellement. Elles n'entraînent pas une variation sensible des composantes tensorielles $\Delta_{3\,\alpha\beta}^{\;jk}(S)$ (52). Et, pour évaluer ces composantes, il convient de prendre en compte dans l'expression (52) les amplitudes quadratiques moyennes, $\overline{A}_{S'\tau'}$.

J'ai fait état d'oscillations fondamentales qui forment un seul train d'onde emplissant tout le cristal ; de la sorte, les oscillations $u_{1\,\alpha,S\tau}^{\;\;m}_{\;\;j}$ (23) faites par tous les atomes ont, au même instant, la même phase temporelle $2\pi\theta_{S\tau}$. En fait, les trains d'ondes élastiques sont de volume borné et leurs dimensions diminuent quand la température s'élève [7-8]. Les différences entre les phases temporelles, $2\pi\theta_{S\tau}$, des oscillations $u_{1\,\alpha,S\tau}^{\;\;m}_{\;\;j}$ transportées par des trains d'ondes distincts et la perturbation de ces oscillations aux frontières qui séparent les trains d'onde, influent sur l'intensité des forces de rappel $f_{3\,\alpha,S\tau}^{\;\;m}_{\;\;j}$ (48-49-50). Ces forces ne sont pas strictement définies par les expressions (48-49-50). Mais les trains d'ondes formés par une même oscillation fondamentale, $S\tau$, conservent à toute température des dimensions très grandes par rapport à la longueur d'onde élémentaire Λ, celle qui se rapporte au vecteur d'onde fondamentale $\boldsymbol{S} : \Lambda = 1/|\boldsymbol{S}|$. Entre les forces $f_{3\,\alpha,S\tau'}^{\;\;m}_{\;\;j}$, véritables, et les forces $f_{3\,\alpha,S\tau}^{\;\;m}_{\;\;j}$ définies par les expressions (48-49-50), l'écart reste toujours minime. D'autre part, à température constante, les trains d'ondes élastique gardent, dans l'ensemble, les mêmes dimensions. De même que les échanges d'énergie entre les oscillations fondamentales, l'incohérence des oscillations $u_{1\,\alpha,S\tau}^{\;\;m}_{\;\;j}$, transportées par des trains d'ondes différents, ne provoque pas au cours du temps, une fluctuation sensible des composantes tensorielles $\Delta_{3\,\alpha\beta}^{\;jk}(\boldsymbol{S})$. A température constante, ces composantes peuvent être tenues pour constantes ([6]).

La matrice $\Delta_3(\boldsymbol{S})$ (52-53, 54, 55) est hermitienne, et $\Delta_3(-\boldsymbol{S}) = \Delta_2^*(\boldsymbol{S})$. D'autre part, les composantes tensorielles $\Delta_{3\,\alpha\beta}^{\;jk}(\boldsymbol{S})$, comparées aux composantes tensorielles $\Gamma_{\alpha\beta}^{jk}(\boldsymbol{S})$, ne sont qu'une correction. Les équations séculaires (51) peuvent être résolues par itération. On porte dans la matrice $\Delta_3(\boldsymbol{S})$, au lieu des inconnues $\zeta^{k\beta}_{,S\tau}$ et $\overline{A}_{S\tau}$, les coordonnées vectorielles $\zeta^{k\beta}_{,S\tau}$ et les amplitudes quadratiques moyennes $\overline{A}_{S\tau}$ ([7]) déterminées par les équations

minée, se rapportant l'un et l'autre à l'oscillation fondamentale $S\tau$. Au contraire, pour déterminer les coefficients $b_{j\alpha,S\tau}^{\nu}$ et les phases $2\pi\varphi'_{j\alpha,S\tau}$ ($j = 1, 2, \ldots, g$, $\nu = 1, 2, 3$), il est nécessaire de se donner l'un de ces coefficients et l'une de ces phases. L'introduction des « oscillations anormales », définies par l'expression précédente, entraîne des calculs inextricables. Mais le premier terme de cette expression, celui qui représente une oscillation dont l'amplitude croît avec le temps, révèle que les fréquences déterminées par les équations séculaires (27) de la première analyse ne sont pas les fréquences véritables des oscillations fondamentales.

([6]) Notons encore que les composantes tensorielles $\Delta_{3\,\alpha\beta}^{\;jk}(S)$ ne varient pas avec le volume du cristal, sauf si ce volume devenait extrêmement petit. Pour un cristal de $\mathcal{N}$ atomes, la somme (52) compte $3\mathcal{N}$ termes ; mais les carrés des amplitudes quadratiques moyennes $\overline{A}_{S\tau}$ étant en raison inverse de la masse du cristal (24), chaque terme est inversement proportionnel à $\mathcal{N}$; donc la somme reste constante quand $\mathcal{N}$ varie.

([7]) L'amplitude quadratique moyenne $\overline{A}_{S\tau}$ est déterminée par la pulsation $\omega_{S\tau}$ (56).

séculaires (27) de la première analyse. Ainsi modifiées, les équations séculaires (51) peuvent être résolues ; elles donnent une première solution approximative. Puis on inscrit les coordonnées vectorielles $\zeta^{k\beta}{}_{.S\tau}$ et les amplitudes quadratiques moyennes $\bar{A}_{S\tau}$ fournies par cette première solution dans la matrice $\Delta_3(S)$, et l'on résout de nouveau les équations obtenues par cette seconde modification des équations séculaires (51). Cela donne une deuxième solution approximative moins erronée que la première, etc... On poursuit le calcul par ce procédé jusqu'à ce que les coordonnées vectorielles $\zeta^{k\beta}{}_{.S\tau}$ et les amplitudes quadratiques moyennes $\bar{A}_{S\tau}$ calculées se confondent sensiblement avec les coordonnées vectorielles et les amplitudes quadratiques moyennes portées dans la matrice $\Delta_3(S)$.

Les oscillations fondamentales $S\tau$ déterminées par les valeurs caractéristiques et les vecteurs propres de la matrice de Fourier (27-28) sont indépendantes les unes des autres. Chacune a l'énergie d'un oscillateur harmonique et l'amplitude quadratique moyenne

$$\bar{A}_{0\,S\tau} = \left[\frac{2\hbar}{M\,\omega_{S\tau}}\left(\frac{1}{\exp\frac{\hbar\,\omega_{S\tau}}{k\,\Theta} - 1} + \frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (56)$$

Les oscillations fondamentales, déterminées par les équations séculaires (51) sont liées entre elles par les forces $f_3{}^{m}_{\alpha}{}^{j}{}_{(S\tau)}$ (48). Elles peuvent être encore quantifiées (approximativement) par la méthode des perturbations. Mais le calcul des amplitudes quadratiques moyennes $\bar{A}_{S\tau}$ recèle ensuite des difficultés. Présentement il est impossible de le mener à bien faute de connaître les grandeurs véritales des dérivées troisièmes, $D^{mpq}_{\alpha\beta\gamma}{}^{jkl}$, et quatrièmes, $E^{mpqr}_{\alpha\beta\gamma\delta}{}^{jkls}$, de l'énergie potentielle [1-2] [8]. Toutefois, les théories classiques (Debye, Max Born), qui font seulement état des oscillations fondamentales, et les supposent indépendantes, retombent sensiblement, sauf aux hautes températures, sur les chaleurs spécifiques mesurées. L'écart relatif $\left|\frac{\bar{A}_{S\tau} - \bar{A}_{0S\tau}}{\bar{A}_{S\tau}}\right|$ reste sans doute minime et peut être négligé en première étude.

2° Retranchons de la force $\varphi_3{}^{m}_{\alpha}{}^{j}$ (34) toutes les forces élémentaires périodiques $f_3{}^{m}_{\alpha}{}^{j}{}_{.S\tau}$ qui ont les fréquences des oscillations fondamentales. Soit $\varphi_3'{}^{m}_{\alpha}{}^{j}$ la force restante.

[8] Ce calcul porte sur des séries. Et pour définir, même avec une précision modeste l'écart $\left|\frac{\bar{A}_{S\tau} - \bar{A}_{0S\tau}}{\bar{A}_{S\tau}}\right|$, il serait nécessaire d'effectuer de longs calculs numériques.

Les équations

$$\mu_j\,\ddot{u}_3{}^{m}_{\alpha}{}^{j} + \sum_{pk\beta} C^{m-p}_{\alpha\ \beta}{}^{j\ k}\,u_3{}^{p\beta}_{k} = \varphi_3'{}^{m}_{\alpha}{}^{j}$$

sont décomposables, comme les équations (42), en systèmes de $3g$ équations de d'Alembert, qui se rapportent à des forces élémentaires $f_3{}^{m}_{\alpha}{}^{j}{}_{.S\tau\pm S'\tau'\pm S''\tau''}$ toutes de la même fréquence $|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'} \pm \nu_{S''\tau''}|$. De sorte que chaque système de $3g$ équations détermine une oscillation secondaire $S\tau \pm S'\tau' \pm S''\tau''$, d'élongation

$$A_{S\tau}\,A_{S'\tau'}\,A_{S''\tau''}\,c^{j\alpha}{}_{.S\tau\pm S'\tau'\pm S''\tau''} \times \cos 2\pi[(\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'} \pm \nu_{S''\tau''})\,t + \theta_{S\tau} \pm \theta_{S'\tau'} \pm \theta_{S''\tau''} + \varphi_{j\alpha,S\tau\pm S'\tau'\pm S''\tau''} - (S \pm S' \pm S'')\,m]. \qquad (57)$$

Les coefficients $c^{j\alpha}{}_{.S\tau\pm S'\tau'\pm S''\tau''}$ et les phases $2\pi\varphi_{j\alpha,S\tau\pm S'\tau'\pm S''\tau''}$ sont donnés, comme les coefficients $c^{j\alpha}{}_{.S\tau\pm S'\tau'}$ (44) et les phases, $2\pi\varphi_{j\alpha,S\tau\pm S'\tau'}$ (44), par la solution des $3g$ équations séculaires que l'on obtient en éliminant le temps des équations de d'Alembert.

Les coefficients $c^{j\alpha}{}_{.S\tau\pm S'\tau'\pm S''\tau''}$ sont du second degré par rapport aux dérivées troisièmes $D^{mpq}_{\alpha\beta\gamma}{}^{jkl}$ et du premier degré par rapport aux dérivées quatrièmes $E^{mpqr}_{\alpha\beta\gamma\delta}{}^{jkls}$ de l'énergie potentielle [1-2].

Ainsi, la seconde analyse décompose l'agitation thermique en oscillations fondamentales, $S\tau$, déterminées par les équations séculaires (51) et en oscillations secondaires $S\tau \pm S'\tau'$ (44) de degré 2, et $S\tau \pm S'\tau' \pm S''\tau''$ (57) de degré 3, respectivement de fréquence $|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'}|$ et $|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'} \pm \nu_{S''\tau''}|$.

VI. **Troisième analyse.**

La troisième analyse (équations (38)) fait état d'oscillations fondamentales déterminées par les équations

$$\mu_j\,\ddot{u}_1{}^{m}_{\alpha,S\tau}{}^{j} + \sum_{pk\beta} C^{m-p}_{\alpha\ \beta}{}^{j\ k}\,u_1{}^{p\beta}_{k}{}_{.S\tau} = f_3{}^{m}_{\alpha,S\tau}{}^{j} + f_5{}^{m}_{\alpha,S\tau}{}^{j}. \qquad (58)$$

Elle comprend les deux opérations de la seconde analyse et se prolonge par deux opérations nouvelles qui peuvent être effectuées selon la méthode suivie en seconde analyse.

Je donnerai seulement les résultats.

Quatrième opération. — Classées selon leur degré, les forces élémentaires comprises dans la force $\varphi_4{}^{m}_{\alpha}{}^{j}$ se rangent en 3 catégories. Ce sont :

1° Des forces sensiblement constantes au cours du temps, développées par les oscillations fondamentales $S\tau$, et par les premières composantes des oscillations secondaires $S\tau \pm S'\tau'$, celles qui sont

de degré 2 ; 2° des forces périodiques dont la fréquence est $|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'}|$. Les oscillations qu'elles entretiennent, de degré 4, forment les secondes composantes des oscillations secondaires $S\tau \pm S'\tau'$; 3° ce sont enfin des forces périodiques de fréquences $|\nu_{S\tau} \pm \ldots \pm \nu_{S'''\tau'''}|$ qui entretiennent des oscillations ayant la même fréquence, pilotées par les vecteurs $\pm (S \pm S' \pm S'' \pm S''')$.

Cinquième opération. — 1° En éliminant le temps des équations de d'Alembert (58) on trouve les équations séculaires

$$\omega^2 \zeta = (\Gamma(S) + \Delta_3 (S) + \Delta_5(S)) \zeta \qquad (59)$$

où la matrice $\Delta_5(S)$ tient compte des forces $f_{5\,\alpha\,.S\tau}^{\,m\,j}$ [9]. Ces équations peuvent aussi être résolues par itération. On porte dans les matrices $\Delta_3(S)$ et $\Delta_5(S)$ les coordonnées vectorielles $\zeta^{k\beta}{}_{.S\tau}$ et les amplitudes quadratiques moyennes $\overline{A}_{S\tau}$ déterminées par les équations séculaires (51) de la seconde analyse. En résolvant les équations (59) modifiées de la sorte, on obtient une solution approximative qui peut être prise comme point de départ du calcul itératif.

2° Retranchons de la force $\varphi_{5\,\alpha}^{\,m\,j}$ toutes ses composantes $f_{5\,\alpha\,.s\tau}^{\,m\,j}$ ($s = 1,2, \ldots, 3N$; $\tau = 1, 2, \ldots, 3g$). La force restante est la résultante des forces élémentaires qui entretiennent des oscillations de fréquences

$$|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'} \pm \nu_{S''\tau''}| \text{ et } |\nu_{S\tau} \pm \ldots \pm \nu_{S_5\tau_5}|.$$

Les oscillations de fréquence $|\nu_{S\tau} \pm \nu_{S'\tau'} \pm \nu_{S''\tau''}|$ forment les secondes composantes des oscillations secondaires $S\tau \pm S'\tau' \pm S''\tau''$.

Ainsi, de proche en proche, l'agitation thermique peut être résolue en composantes harmoniques. Et le nombre de ces composantes et la précision de leur définition croissent avec le rang de l'analyse effectuée.

VII. Conclusion.

Les forces de rappel développées par l'agitation thermique n'obéissent pas à la loi de Hooke. Cela entraîne les conséquences suivantes :

1° Mus par l'agitation thermique, les atomes exercent les uns sur les autres des forces répulsives sensiblement constantes dans le temps, qui croissent avec la température. Ces forces constituent les tensions thermiques ; elles dilatent le milieu cristallin.

Si l'agitation thermique développait des forces de rappel conformes à la loi de Hooke, elle ne produirait pas de tensions thermiques, donc pas de dilatation. Or, une élévation de la température provoque toujours une dilatation du milieu cristallin libre de toute contrainte, même si la température initiale est très proche du zéro absolu. Donc, même aux basses températures, l'agitation thermique développe des forces de rappel qui ne restent pas proportionnelles aux élongations.

2° L'agitation thermique n'est pas analysable en oscillations harmoniques indépendantes, au nombre de $3\mathfrak{N}$ dans un cristal formé de $\mathfrak{N}$ atomes. Elle comprend des oscillations fondamentales, au nombre de $3\mathfrak{N}$, et des oscillations secondaires qui sont, au sens large, les harmoniques des oscillations fondamentales. Les oscillations secondaires sont entretenues par des forces de rappel qui sont du second, du troisième degré, etc... par rapport aux amplitudes des oscillations fondamentales. Aux basses températures, voisines du zéro absolu, les oscillations secondaires sont infimes ; mais aux hautes températures, elles cessent d'être négligeables. A proximité du point de fusion, leur amplitude quadratique moyenne, totale, excède probablement chez de nombreux cristaux, le dixième de l'amplitude quadratique moyenne atteinte par l'agitation thermique globale. C'est la raison principale de l'écart entre les chaleurs spécifiques prévues par les théories classiques et les chaleurs spécifiques mesurées sur des cristaux portés aux températures élevées.

Comme les oscillations fondamentales, les oscillations secondaires produisent dans le milieu cristallin des trains d'ondes de densité électronique et des trains d'ondes de potentiel électrique. Elles contribuent de la sorte à la diffusion des radiations électromagnétiques et des électrons. En particulier, elles renforcent la diffusion des rayons X [10], et augmentent la résistivité des métaux.

3° La fréquence d'une oscillation fondamentale est fonction des puissances paires des amplitudes quadratiques moyennes de toutes les oscillations fondamentales.

A élongations égales, la force de rappel véritable exercée sur un atome est en général moindre que la force de rappel $f_{1\,\alpha}^{\,m\,j}$ (20) conforme à la loi de Hooke ; elle est semblable en cela au couple de rappel exercé sur le pendule gravifique. De même, la force de rappel $f_{\,\alpha\,.S\tau}^{\,m\,j}$ (35), qui entretient une oscillation fondamentale est, en général, plus faible que la force de rappel, $f_{1\,\alpha\,.S\tau}^{\,m\,j}$ (36), proportionnelle à l'élongation. En conséquence, les fréquences $\nu_{S\tau}$ des oscillations fondamentales sont, dans leur ensemble, moins élevées que les fréquences $\nu_{0S\tau}$ déterminées par les équations séculaires (27) prises en compte par les théories classiques. Et, comme la différence $|f_{1\,\alpha\,.S\tau}^{\,m\,j} - f_{\,\alpha\,.S\tau}^{\,m\,j}|$, l'écart $|\nu_{S\tau} - \nu_{0S\tau}|$ croît avec l'amplitude des oscillations fondamentales, donc avec la température.

[9] En toute rigueur il serait nécessaire de redéfinir les amplitudes quadratiques moyennes, $A_{S\tau}$, à la précision atteinte en troisième analyse.

Supposons que l'énergie potentielle du milieu cristallin et toutes ses dérivées $C^{m-p}_{\substack{j\ k\\ \alpha\ \beta}}$, $D^{mpq}_{\substack{jkl\\ \alpha\beta\gamma}}$, ..., (6 *bis*) restent constantes quand la température s'élève, ce qui a sensiblement lieu dans un cristal maintenu à volume constant, si les réseaux formés par les atomes en même position dans la maille ne se déplacent par les uns par rapport aux autres et si les transitions des électrons faiblement liés vers des états d'énergie plus élevée sont en nombre réduit. Cela étant, lorsque la température s'élève, les oscillations fondamentales s'amplifient, donc leurs fréquences diminuent. Mais, pour une même élévation de la température, cet abaissement de fréquence, dû exclusivement au fait que les forces de rappel n'obéissent pas à la loi de Hooke, reste certainement petit par rapport à l'abaissement de fréquence, considérable, qui est entraîné par la dilatation thermique du milieu cristallin libre de toute contrainte.

Manuscrit reçu le 14 octobre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Löwdin (P. O.), *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 1948, A **35**, n° 9, 1, n° 30, 1. Lundqvist (S. O.), *Ark. f. Fys.*, 1955, **9**, n° 29, 435.

[2] Laval (J.), L'élasticité du milieu cristallin I. L'énergie potentielle d'un cristal et les constantes de rappel atomiques. *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 247.

[3] Laval (J.), L'élasticité du milieu cristallin III. Les déformations linéaires. *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 369.

[4] Laval (J.), L'élasticité du milieu cristallin II. Dynamique des ondes élastiques. *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 289.

[5] Born (M.), Theoretical investigations on the relation between crystal dynamics and X-Ray scattering. *Reports on progress in Physics* (The Physical Society), 1943, IX, 294.

[6] Born (M.), Dynamik der Krystallgitter, Leipzig, Teubner, 1915.

[7] Peierls (R. E.), *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1933, **5**, 177. Peierls (R. E.), Quantum theory of solids, Oxford, 1954.

[8] Herpin (A.), Contribution à l'étude de la théorie cinétique des solides. *Ann. Physique*, 1952, **7**, 91.

[9] Laval (J.), Propriétés des forces de rappel appliquées sur les atomes d'un cristal. *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 510.

[10] Laval (J.), Théorie de la diffusion des rayons X. *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 545-657.

REVUE DES LIVRES

Ortusi (J.), **Propagation des ondes électromagnétiques de haute fréquence** (1 vol. relié, vi + 320 pages, 17 × 25 cm, Société Française de Documentation Électronique, Paris, 1957, 3 100 F).

Il s'agit du premier ouvrage de la « Collection des Annales de Radioélectricité », dirigée par M. Maurice Ponte. Le but de cette collection est de faire le point des chapitres les plus évolués de l'électronique et de ses applications, en dégageant les traits essentiels de la technique exposée, sans entrer dans les détails. A ce titre le livre de M. Ortusi ne peut manquer d'intéresser bien des physiciens, ingénieurs ou chercheurs. On notera cependant que les préoccupations pratiques et utilitaires ne sont pas absentes. Comme l'auteur nous le dit lui-même : « Cet ouvrage est rédigé de façon à servir de cadre aux ingénieurs chargés de résoudre certains problèmes de canalisation de l'énergie pour obtenir une utilisation plus rationnelle de ses propriétés. »

La table des matières indique cinq parties : 1) L'énergie électromagnétique ; 2) Les ondes guidées progressives ; 3) La propagation dans les milieux anisotropes ; 4) Les branchements de guides, et 5) La propagation autour de la surface terrestre. On remarquera entre autres le chapitre consacré à la propagation dans les guides renfermant des ferrites (Chap. III de la 3e partie) et le chapitre concernant certains branchements de guides : filtres de fréquence, gyrateurs, isolateurs, jonctions hybrides et circulateurs (Chap. IV de la 4e partie).

Malgré l'étendue du sujet, l'auteur ne s'est pas contenté d'une simple compilation des résultats éparpillés dans la littérature technique. Mais il a édifié une théorie simple des transformations de l'énergie électromagnétique, ce qui donne de l'unité à son ouvrage tout en lui fournissant bien des aperçus très originaux.

M. Jessel.

Hertz (G.), **Traité de physique nucléaire** I. Méthodes expérimentales. (**Lehrbuch der Kernphysik,** I. Experimentelle Verfahren) (en allemand). Un vol. de 227 p., relié, 16,5 × 23 cm, Teubner, Leipzig, 1958, prix D. M. 15.

Il s'agit d'un ouvrage collectif, chaque chapitre est d'un auteur différent, et qui s'adresse aux expérimentateurs et aux ingénieurs. Les connaissances mathématiques requises sont simples. Deux autres volumes doivent suivre celui-ci : physique nucléaire proprement dite, et applications.

Introduction : Généralités sur les photons, les électrons, les atomes et les noyaux. *A*) I. Détermination de la charge nucléaire. II. Détermination du rayon nucléaire. III. Masses nucléaires. IV. Moments nucléaires.

B) Preuves et détermination des rayonnements de haute énergie. V. Courants d'ionisation, mesure. VI. Particules isolées : rayons gammas, interaction avec la matière, observation, comptage. Appareils électroniques. Spectromètres pour rayons alpha, bêta, gamma.

C) Accélérateurs de particules. VII. Accélérateurs linéaires. VIII. Accélérateurs circulaires (bétatron, cyclotron, synchrotron pour protons et électrons, et avec champs alternés. IX. Développement probable.

Cet ouvrage contient 139 figures et photos d'une grande clarté.

J. Winter.

L'ANALYSE DES MÉTHODES DE MESURE DU COEFFICIENT γ DES GRANDES GERBES DU RAYONNEMENT COSMIQUE

Par R. FIRKOWSKI et A. ZAWADZKI,

Institut des Recherches Nucléaires de l'Académie Polonaise des Sciences.

Résumé. — L'analyse formelle des deux méthodes de mesure de l'exposant γ (A : variation du rang de coïncidences, B : variation de la surface des bancs de compteurs) montre qu'elles *ne sont pas complémentaires* indépendamment de l'existence du gradient de densité dans la section horizontale d'une grande gerbe. La présence du gradient de densité entraîne un accroissement apparent de la valeur de γ déterminée par la méthode A.

En utilisant un dispositif hodoscopique qui permet l'enregistrement des coïncidences triples, quadruples, quintuples et sextuples en même temps, on démontre que la valeur de γ obtenue par la méthode A est supérieure à la valeur donnée par la méthode B, et que cette valeur croît avec l'ordre de coïncidence. Toutes les conclusions ont été tirées d'une série *unique* de mesures comportant plus de 124 000 enregistrements des coïncidences. Par une méthode appropriée de calcul on a mis à profit toutes les combinaisons d'enregistrements, grâce à la possibilité de passer du nombre des coïncidences de l'ordre déterminé au nombre des coïncidences qui sont *au moins* de l'ordre déterminé (p. ex. des coïncidences triples aux coïncidences *au moins* triples). Cette circonstance diminue d'une façon appréciable la valeur des erreurs statistiques.

Abstract. — The formal analysis of the two measurement methods of the γ exponent (A : variation of the order of the coincidence, B : variation of the area of the counter trays) shows that they are not complementary independently of the existence of the density gradient in the horizontal section of the extensive air shower. The presence of the density gradient causes an apparent increase of the γ value as determined by the method A. By using a hodoscopic arrangement witch allows one to record simultaneously threefold, fourfold, fivefold and sixfold coincidences we can show that the γ value obtained by method A is higher than the value obtained by method B and that the value increases with the order of coincidence. All the conclusions have been based on a single set of measurements of 124 000 coincidence records. By using an appropriate computing method we have taken advantage of all possible recording combinations ; this was possible due to the transition from coincidences of a given order to coincidences which are at least of the given order (e.g. from threefold coincidences to at least threefold coincidences). This fact considerably reduces the statistical errors.

1. Introduction. — On peut représenter le spectre des densités des grandes gerbes sous forme de l'expression différentielle suivante :

$$N(\rho)\,d\rho = K\rho^{-(\gamma+1)}\,d\rho \qquad (1)$$

où N est le nombre des gerbes de densité comprise entre ρ et $\rho + d\rho$.

La fréquence d'enregistrement des gerbes par un système de coïncidences de n bancs identiques de compteurs est égale à :

$$J_n = KS^\gamma \int_0^\infty (1 - e^{-x})^n\, x^{-(\gamma+1)}\, dx \qquad (2)$$

où $x = \rho S$ est le produit de la densité ρ des particules par la surface S de chaque banc de compteurs.

On obtient pour la valeur J_n :

$$J_n = KS^\gamma\, \Gamma(-\gamma) \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} l^\gamma. \qquad (3)$$

En se servant de la valeur J_n on peut déterminer la valeur γ ; à cet effet il faut effectuer au moins deux mesures en vue d'éliminer la constante K.

Le but du présent travail est l'analyse de deux méthodes de mesure de l'exposant γ. Les deux méthodes s'appellent dans la nomenclature de Cocconi (1949) A et B.

A. La méthode de variation du rang des coïncidences qui consiste à comparer la fréquence des coïncidences de $n^{\text{ième}}$ ordre avec la fréquence des coïncidences de $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre :

$$\frac{J_n(S)}{J_{n-1}(S)} = \frac{\sum (-1)^l \binom{n}{l} l^\gamma}{\sum (-1)^l \binom{n-1}{l} l^\gamma}. \qquad (4)$$

B. La méthode de variation de la surface des compteurs qui consiste à comparer les fréquences des coïncidences du même ordre entre les bancs de compteurs dont chacun a changé la surface dans la même proportion σ :

$$\frac{J_n(\sigma S)}{J_n(S)} = \sigma^\gamma \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\ln \dfrac{J_n(\sigma S)}{J_n(S)}}{\ln \sigma}. \qquad (5)$$

La méthode A exige la supposition d'une densité constante moyenne dans toute l'envergure des compteurs et par là même néglige l'existence du gradient de la densité dans une section horizontale d'une gerbe.

L'emploi de la méthode B n'exige cependant pas la supposition de la constance de la densité parce que la fonction de la répartition des densités des particules dans une gerbe [$\rho(r)$, où r est la distance de l'axe] est à peu près la même pour toutes les grandes gerbes.

On peut démontrer que les valeurs de γ obtenues au moyen de la méthode A sont pour cette raison faussement augmentées parce que le gradient de la densité dans la section horizontale d'une grande gerbe cause une différence mesurable des densités entre deux bancs de compteurs éloignés de quelques mètres l'un de l'autre (Broadbent, 1950).

Nous présentons ci-dessous une comparaison de quelques résultats obtenus par différents auteurs sur le niveau de la mer (approximativement).

Auteurs	Densité (particules/m²)	γ Méthode A	Méthode B
—	—	—	—
Auger, Daudin (1945)	∼ 70	1,66	
Cocconi et coll. (1946)	10 — 1 000		1,46
Zatsepine et coll. (1947)	20 — 40		1,43
Maze et coll. (1948)	∼ 100	1,67	
Cocconi, Cocconi-Tongiorgi (1949)	5 — 300	1,42	1,37 (*)
Broadbent et coll. (1950)	5 — 500		1,425
Hodson (1953)	5 — 500	1,58	1,45
Murdoch (1958)	∼ 1		1,34

(*) Calculé par nous comme moyenne des résultats obtenus séparément pour les coïncidences triples et quadruples.

On voit qu'il existe des différences entre les résultats obtenus par la méthode A et B, mais cependant les divergences entre les données des différents auteurs rendent impossible une conclusion définitive au sujet de l'applicabilité des deux méthodes. Ces divergences découlent de l'utilisation des différents types de dispositifs expérimentaux, de différents degrés d'exactitude et de divers autres facteurs qu'on ne peut pas éliminer. Il faut pourtant remarquer que la question de la différence entre les deux méthodes n'est pas définitivement éclaircie dans la littérature. Dans ses travaux Daudin (1948 et 1949) a essayé de justifier d'une façon théorique et expérimentale l'identité des deux méthodes. Dans son rapport monographique Deutschmann (1953) n'attache pas d'importance à la différence mentionnée. La même chose concerne aussi les travaux de Zatsepine (1950) et de Dobrotine et coll. (1953). Dans son étude approfondie au sujet des grandes gerbes Greisen (1956) suggère qu'on peut éviter la différence entre les méthodes A et B en utilisant un dispositif expérimental d'une géométrie appropriée comme celui utilisé dans le travail de Cocconi (1949). A notre avis (comme nous essayerons de le démontrer dans la suite) cette différence peut être diminuée mais ne peut pas être complètement éliminée.

Le but du présent travail est l'analyse de deux méthodes A et B en vertu d'une série *unique* de mesures, ce qui permet d'éviter des facteurs provenant de la différence qui est liée toujours d'une façon plus ou moins expressive avec deux séries de mesures indépendantes.

2. **L'analyse du rapport formel des méthodes A et B.** — Daudin, dans ses travaux (1948, 1949), conclut que les deux méthodes ne doivent pas fournir de résultats différents parce qu'elles sont complémentaires. La preuve fournie par Daudin est formelle et ne doit pas dépendre de la présence ou de l'absence du gradient de densité. Son raisonnement est le suivant : Soit trois bancs de compteurs des surfaces égales S dont un est séparé des deux autres (qui sont juxtaposés) par une distance de quelques mètres. Les bancs des compteurs peuvent être mis en coïncidences doubles (S, S) et ($S + S$, S) $=$ ($2S$, S) ou triples (S, S, S). La coïncidence (S, S) (des deux bancs séparés évidemment) se compose de la coïncidence (S, S, S) et de la coïncidence (S, S *non* S) ce que nous écrivons en abrégé :

$$(S, S) = (S, S, S) + (S, S, \bar{S}) ;$$

d'autre part :

$$(S, 2S) = (S, S, S) + 2(S, S, \bar{S}).$$

En éliminant le terme contenant la négation S on obtient :

$$2(S, S) - (S, 2S) = (S, S, S).$$

Ce que l'auteur appelle une dépendance complémentaire, c'est qu'en connaissant les valeurs (S, S) et (S, S, S) utilisées dans la méthode A, on connaît aussi la valeur (S, $2S$). Si la valeur (S, $2S$) pouvait vraiment, comme le juge l'auteur, servir dans les calculs de la méthode B, sa preuve formelle (dans laquelle on ne fait aucune supposition au sujet du

gradient de densité) suffirait à démontrer l'identité des deux méthodes. La valeur $(S, 2S)$ ne peut pourtant pas s'appliquer à la méthode B, parce qu'elle ne permet pas d'utiliser la formule (5). [Les deux intégrales (2) s'éliminent de l'expression (5) à condition de changer de toutes les surfaces S par le même facteur σ.]

On peut poser la question si cette insuffisance ne s'ensuit pas du caractère incomplet du dispositif admis. Le dispositif (S, S, S) ne peut pas, notamment, servir aux mesures par la méthode B. Pour les mesures de ce type il faut avoir au moins deux bancs séparés de compteurs : (S, S) et (S, S). Nous avons étendu le raisonnement de Daudin à tel système de compteurs, qui peut être mis soit en coïncidences doubles (S, S) [1], soit aussi en doubles $(S + S, S + S) = (2S, 2S)$, soit en triples (S, S, S) soit enfin en quadruples (S, S, S, S).

On voit facilement que :

$$[(S), (S)] = (S, S, S, S) + 2(S, S, S, \bar{S}) + [(S, \bar{S}), (S, \bar{S})] \qquad \text{I}$$

$$(2S, 2S) = (S, S, S, S) + 4(S, S, S, \bar{S}) + 4[(S, \bar{S}), (S, \bar{S})] \qquad \text{II}$$

$$(S, S, S) = (S, S, S, S) + (S, S, S, \bar{S}). \qquad \text{III}$$

On élimine les négations doubles des égalités I et II :

$$4[(S), (S)] - (2S, 2S) = 3(S, S, S, S) + 4(S, S, S, \bar{S}). \qquad \text{IV}$$

On élimine les négations simples des égalités III et IV :

$$4[(S), (S)] - (2S, 2S) = 4(S, S, S) - (S, S, S, S).$$

En mesurant $[(S), (S)]$ et $(2S, 2S)$ c'est-à-dire en se servant de la méthode B on connaît la différence des valeurs qui apparaissent dans la méthode A (triples ou quadruples), mais on ne connaît pas les deux valeurs séparément, ce qui est nécessaire pour appliquer la méthode A. Dans ce but il fallait effectuer encore une mesure : (S, S, S) ou (S, S, S, S). On voit alors que dans ce cas également les deux méthodes ne sont pas complémentaires.

Nous avons poursuivi le même raisonnement en l'appliquant au système des compteurs utilisés dans le présent travail et notamment : trois groupes séparés l'un de l'autre (S, S), (S, S), (S, S) et coïncidences au moins triples actionnées par au moins une impulsion provenant de chaque groupe. On a alors :

$$(S, S, S) = (S, S, S, S, S, S) + 3(S, S, S, S, S, \bar{S}) + 3(S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) + (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S}) \qquad \text{I}$$

$$(2S, 2S, 2S) = (S, S, S, S, S, S) + 6(S, S, S, S, S, \bar{S}) + 12(S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) + 8(S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S}) \qquad \text{II}$$

$$(S, S, S, S) = (S, S, S, S, S, S) + 2(S, S, S, S, S, \bar{S}) + (S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) \qquad \text{III}$$

$$(S, S, S, S, S) = (S, S, S, S, S, S) + (S, S, S, S, S, \bar{S}). \qquad \text{IV}$$

On élimine les négations triples des égalités I et II

$$8(S, S, S) - (2S, 2S, 2S) = 7(S, S, S, S, S, S) + 18(S, S, S, S, S, \bar{S}) + 12(S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) \qquad \text{V}$$

On élimine les négations doubles des égalités III et V

$$12(S, S, S, S) - 8(S, S, S) + (2S, 2S, 2S) = 5(S, S, S, S, S, S) + 6(S, S, S, S, S, \bar{S}). \qquad \text{VI}$$

On élimine les négations simples des égalités IV et VI

$$8(S, S, S) - (2S, 2S, 2S) = 12(S, S, S, S) - 6(S, S, S, S, S) + (S, S, S, S, S, S).$$

Ce qui montre aussi que les deux méthodes ne sont pas complémentaires. En utilisant la méthode B il faut en plus connaître deux des coïncidences : (S, S, S, S), (S, S, S, S, S), (S, S, S, S, S, S), pour pouvoir appliquer la méthode A.

On peut conclure d'une façon générale que, indépendamment de la question du gradient de densité, les méthodes A et B fournissent des résultats qui ne sont pas complémentaires.

3. **Le rôle du gradient de densité.** — L'existence du gradient de densité dans la section horizontale d'une grande gerbe introduit une erreur systématique dans la détermination de l'exposant γ par la méthode A. Cet effet était déjà mentionné par Broadbent et coll. (1950) ; regardons le de plus près. Soit deux bancs juxtaposés de compteurs de surfaces identiques S. Une gerbe de densité ρ particules par m^2 (ou x particules par un banc) actionne les deux bancs avec une probabilité $(1 - e^{-x})^2$. Si l'on éloigne un banc de l'autre et si l'on admet que la densité x reste la même sur un banc, la densité sur l'autre banc est $x + \delta x$ ou $x - \delta x$. La probabilité d'actionnement de ce banc est dans le premier cas $[1 - e^{-(x+\delta x)}]$, dans le deuxième cas

$$[1 - e^{-(x-\delta x)}],$$

en moyenne alors $1 - e^{-x}.(e^{\delta x} + e^{-\delta x})/2$, pourtant

$$\frac{1}{2}(e^{\delta x} + e^{-\delta x}) = 1 + \frac{(\delta x)^2}{2!} + \frac{(\delta x)^4}{4!} + \dots > 1,$$

[1] Il est évident que dans ce cas les deux S appartiennent aux différents bancs, on peut éventuellement, pour souligner cette évidence, utiliser la notation suivante : $[(S), (S)]$.

par conséquent la probabilité d'enregistrement de la gerbe par le deuxième banc est moindre si l'on admet la présence du gradient de densité [2].

Au lieu de deux bancs de compteurs on peut, de la même façon examiner n bancs, on voit alors que le rapport $J_n(S)/J_{n-1}(S)$ est toujours diminué par la présence du gradient de densité et que la valeur déterminée de γ est en apparence augmentée.

Il est évident que la différence de densité sur les différents bancs ne dépend pas directement de la distance entre les bancs mais de la distance comptée radialement à partir de l'axe de la gerbe ; autrement dit c'est la différence des distances de l'axe qui décide. Il est justifié d'admettre que durant une longue série d'enregistrement les axes des gerbes tombent d'une façon isotrope autour du dispositif expérimental. Dans ce cas il est facile de démontrer que les « distances radiales » entre les différents bancs de compteurs sont égales aux distances réelles multipliées par le facteur $2/\pi$.

4. Dispositif expérimental. — L'hodoscope dont on se servait dans le présent travail, était composé de six bancs de compteurs GM, chacun comportant neuf compteurs de surfaces s identiques ; la surface effective $s = 130$ cm², la surface d'un banc $S = 9s$, $= 0{,}117$ m². Chaque compteur possédait son amplificateur individuel.

Les bancs de compteurs étaient disposés par deux dans les sommets d'un triangle rectangulaire dont les côtés étaient égaux respectivement à 5,5 m ; 6,5 m ; 8,5 m. Les compteurs dans chaque banc étaient écartés de 3 cm l'un de l'autre et placés directement sous un toit d'environ 0,9 g/cm² d'épaisseur (0,6 cm de contre-plaqué et 0,3 cm de carton bitumé pour toiture).

L'enregistrement des coïncidences triples exigeait qu'au moins un compteur dans chaque paire de bancs fût actionné. Le temps de résolution du système central des coïncidences était de 0,5 μ sec, le temps de résolution des coïncidences dans chacun des bancs de compteurs était de 2 μ sec.

On enregistrait alors au moyen d'un appareil cinématographique les allumages des lampes à néon qui signalaient les coïncidences triples $(S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S})$, quadruples $(S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S})$, quintuples $(S, S, S, S, S, \bar{S})$ et sextuples (S, S, S, S, S, S) dans toutes les combinaisons entre les bancs particuliers.

(2) En négligeant les termes d'ordre supérieur de 2 on a pour la probabilité d'enregistrement de coïncidence double par les gerbes d'une densité donnée :

$$P_2 = \left[(1 - e^{-x}) - \frac{1}{2} e^{-x}(\delta x)^2\right](1 - e^{-x})$$

et pour le rapport de cette probabilité à la probabilité $(P_2)_0$ d'enregistrement s'il n'y avait pas de gradient de densité :

$$\frac{P_2}{(P_2)_0} = 1 - \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}(\delta x)^2.$$

5. Résultats des mesures. — On calcule le nombre des coïncidences, *au moins* triples, dans toutes les combinaisons entre les bancs particuliers :

$$8(S, S, S) = (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S}) + 2(S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) + 4(S, S, S, S, S, \bar{S}) + 8(S, S, S, S, S, S) ;$$

le nombre des coïncidences *au moins* quadruples :

$$12(S, S, S, S) = (S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) + 4(S, S, S, S, S, \bar{S}) + 12(S, S, S, S, S, S) ;$$

le nombre des coïncidences *au moins* quintuples :

$$6(S, S, S, S, S) = (S, S, S, S, S, \bar{S}) + 6(S, S, S, S, S, S) ;$$

le nombre des coïcidences *au moins* triples entre les paires de bancs juxtaposés :

$$(S + S,\ S + S,\ S + S) = (2S, 2S, 2S) = (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S}) + (S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) + (S, S, S, S, S, \bar{S}) + (S, S, S, S, S, S).$$

On obtient ainsi les valeurs : (S, S, S), (S, S, S, S) (S, S, S, S, S), (S, S, S, S, S, S) et $(2S, 2S, 2S)$, qui servent pour les calculs dans la méthode A en utilisant par exemple les rapports :

$$\frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S)}, \quad \frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S, S)} \quad \text{et} \quad \frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S, S, S)}$$

et dans la méthode B :

$$\frac{(2S, 2S, 2S)}{(S, S, S)}.$$

En profitant de l'enregistrement hodoscopique au lieu du simple système de coïncidence, on diminue les erreurs statistiques d'une série de mesures. Examinons les erreurs commises dans la méthode B : le nombre $(2S, 2S, 2S)$ est dépourvu d'une erreur statistique quelconque, puisque c'est le nombre total des enregistrements. Pourtant au nombre (S, S, S) on attribue une erreur calculée en partant de $(2S, 2S, 2S)$ parce que c'est le nombre comprenant toutes les combinaisons indépendantes (S, S, S). Autrement dit l'erreur relative commise sur (S, S, S) est égale à l'erreur relative statistique du nombre total des coïncidences $(2S, 2S, 2S)$. De la même façon on calcule dans la méthode A l'erreur sur (S, S, S, S) en partant de la valeur $[(2S, 2S, 2S) - (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S})]$, l'erreur sur (S, S, S, S, S) en partant de $[(2S, 2S, 2S) - (S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) - (S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S})]$ et l'erreur sur (S, S, S, S, S, S) directement de cette valeur puisque il existe une seule combinaison de ce genre : $[(2S, 2S, 2S) - (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S}) - (S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S}) - (S, S, S, S, S, \bar{S})] = (S, S, S, S, S, S)$.

C'est ainsi que l'erreur sur l'exposant

$$\gamma = \ln \frac{(2S, 2S, 2S)}{(S, S, S)} \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

calculée par la méthode B est :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta(2S, 2S, 2S)}{(2S, 2S, 2S)\ \ln\dfrac{(2S, 2S, 2S)}{(S, S, S)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{(2S, 2S, 2S)}}$$

comme

$$\ln\frac{(2S, 2S, 2S)}{(S, S, S)} \simeq 1.$$

En se servant de la méthode A, il est commode, dans le cacul de l'erreur commise sur γ, de profiter des graphiques des fonctions :

$$\gamma = \mathrm{f}\left[\frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S)}\right], \qquad \gamma = \mathrm{f}\left[\frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S, S)}\right]$$

et

$$\gamma = \mathrm{f}\left[\frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S, S, S)}\right].$$

On cherche alors les limites de l'erreur commise sur γ correspondantes aux limites de l'erreur statistique du rapport respectif des nombres des coïncidences. En calculant, par exemple, l'erreur dans le cas du rapport « triples aux quadruples », on a, l'erreur relative sur (S, S, S), $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{(2S,\ 2S,\ 2S)^{1/2}}$ sur (S, S, S, S),

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{[(2S, 2S, 2S) - (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S})]^{1/2}},$$

l'erreur relative sur le rapport $\dfrac{(S, S, S)}{(S, S, S, S)}$,

$$\varepsilon_{3,4}^2 = \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2,$$

$$\varepsilon_{3,4} = \left[\frac{1}{(2S, 2S, 2S)} + \frac{1}{(2S, 2S, 2S) - (S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et l'erreur absolue correspondante :

$$\frac{(S, S, S)}{(S, S, S, S)}\ \varepsilon_{3,4}.$$

On trouve ensuite sur le graphique mentionné les valeurs de $(\gamma \pm \Delta\gamma)$ correspondantes aux $(S, S, S)/(S, S, S, S)\ (1 \pm \varepsilon_{3,4})$.

On procède de même façon dans le cas des rapports « triples aux quadruples » et « triples aux sextuples ».

Dans une série des 112 segments de pellicule photographique nous avons obtenu les nombres suivants d'enregistrement des coïncidences de différents types :

Type de coincidence	Nombre d'enregistrements
$(S, S, S, \bar{S}, \bar{S}, \bar{S})$	39 745
$(S, S, S, S, \bar{S}, \bar{S})$	37 619
$(S, S, S, S, S, \bar{S})$	26 484
(S, S, S, S, S, S)	20 538
$(2S, 2S, 2S)$ (nombre total)	124 386

On a alors pour les coïncidences *au moins* triples, quadruples et quintuples :

(S, S, S)	48 153
(S, S, S, S)	32 501
(S, S, S, S, S)	24 952
$\dfrac{(2S, 2S, 2S)}{(S, S, S)}$	2,583 ± 0,007
$\dfrac{(S, S, S)}{(S, S, S, S)}$	1,482 ± 0,007
$\dfrac{(S, S, S)}{(S, S, S, S, S)}$	1,923 ± 0,011
$\dfrac{(S, S, S)}{(S, S, S, S, S, S)}$	2,345 ± 0,018

On obtient alors les valeurs suivantes de γ.

Méthode B	Méthode A		
	triples / quadruples	triples / quintuples	triples / sextuples
1,369 ± 0,004	1,398 ± 0,010	1,432 ± 0,008	1,454 ± 0,008

L'ensemble des données statistiques était examiné au moyen du test χ^2 qui confirmait ses propriétés normales.

De l'autre côté il faut introduire une correction de la valeur de γ due au fait que la dérivée de γ par rapport à la densité ρ est finie (Greisen, 1956). Pour cette raison le changement de la densité dans les méthodes A et B par un facteur donné est apparent, en réalité il est un peu plus petit à cause de la variation de γ, ce qui entraîne la nécessité de la correction de la valeur de γ. En supposant la variation de γ en fonction de ρ proposée par Greisen, on obtient pour les valeurs corrigées de γ : déterminée par la méthode B — $\gamma = 1{,}382$, déterminée par la méthode A (coïncidences triples aux sextuples) — $\gamma = 1{,}464$.

6. **Conclusions.** — Les valeurs de γ obtenues au moyen de la méthode A dépassent la valeur obtenue par la méthode B. Ce fait est constaté en dehors des limites des erreurs statistiques. D'autre part on

observe l'accroissement de la valeur déterminée de γ avec l'ordre de coïncidence employé. A notre avis, c'est une preuve de l'augmentation du rôle du gradient de densité dans l'enregistrement des gerbes par un dispositif de coïncidence d'ordre supérieur. Il est évident que la probabilité de l'enregistrement, par exemple, d'une coïncidence sextuple est diminuée par rapport à celle d'une coïncidence quadruple — à cause de la présence du gradient de densité. L'influence de ce facteur provoque un accroissement apparent de la valeur de γ de 6 % dans le cas du rapport « sextuples aux triples », il faut pourtant se rendre compte que la disposition géométrique des bancs de compteurs réalisée dans cette expérience ne favorisait guère l'influence du gradient de densité (bancs juxtaposés). Si l'on s'imagine la disposition des bancs supplémentaires en dehors du triangle des trois bancs (*S*, *S*, *S*), l'influence du gradient de densité doit augmenter.

La probabilité d'intervention d'autres facteurs tel que le changement de densité pouvant causer l'accroissement de la valeur de γ en passant des coïncidences triples aux sextuples est exclue : ce changement de densité des gerbes détectées qui passe d'environ 8,5/m² (méthode B) à 15,5/m² (triples aux sextuples) peut introduire un changement de γ de 1,6 % au maximum.

Nous remercions M. M. Miesowicz pour ses suggestions importantes, M. A. Tomaszewski pour les discussions, Mlles Z. Chodkowska, Z. Kedzierska et M. T. Szubert pour le déchiffrement de pellicules photographiques, MM. C. Lis, P. Sulkowski et S. Kowalczyk pour leur aide technique.

Manuscrit reçu le 12 novembre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

Auger (P.) et Daudin (J.), *J. Physique Rad.*, 1945, **6**, 233.
Broadbent (D.), Kellermann (E.) et Hakeem (M.), *Proc. Phys. Soc.*, 1950, **63 A**, 864.
Cocconi (G.), Loverdo (A.) et Tongiorgi (V.), *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 841.
Cocconi (G.) et Cocconi Tongiorgi (V.), *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1058.
Daudin (J.), Cosmic Radiation, Colston Papers 171, 1948 ; *J. Physique Rad.*, 1949, **10**, 65.
Deutschmann (M.), Kosmiche Strahlung, Berlin, Springer, 1953, 429.
Dobrotin (N.), Zatsepine (G.), Rozental (I.) et coll., *Usp. Fiz. Nauk*, 1953, XLIX, 185.
Greisen (K.), *Prog. Cosmic Rays Phys.*, III, Amsterdam 3, 1956.
Hodson (A. L.), *Proc. Phys. Soc.*, 1953, **66 A**, 49.
Maze (R.) et Fréon (A.) et Auger (P.), *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 418.
Murdoch (H. S.), Communication privée, 1958.
Zatsepine (G.), Miller (W.) et coll., *J. Exp. Teor. Fiz.*, 1947, **17**, 1125.
Zatsepine (G.), Dissertation, F. I. A. N., Moscou, 1950.

REVUE DES LIVRES

Robin (L.), **Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales.** — Tome II (1 vol. 16 × 25 cm, viii + 384 pages ; Gauthier-Villars, Paris, 1958, 5 000 F). — Collection technique et scientifique du C. N. E. T.

Comme le tome I, paru à la fin de 1957, cet ouvrage, rédigé en vue des applications, s'adresse aux mathématiciens, physiciens, chercheurs et ingénieurs qui ont à se servir des fonctions sphériques. On y trouve la plus grande variété de formules utiles, avec leurs domaines de validité et souvent même leurs démonstrations.

L'essentiel de ce deuxième volume est consacré aux fonctions associées de Legendre (Chap. IV et V) : formules de développements en séries, expressions sous forme d'intégrales définies ou d'intégrales de contour, calcul d'intégrales définies contenant des fonctions de Legendre, relations entre fonctions de Legendre et fonctions de Bessel ; valeurs approchées, développements asymptotiques, inégalités simples vérifiées par les fonctions associées de Legendre. Le dernier chapitre (Chap. VI) concerne les développements en séries de fonctions sphériques : séries de polynômes de Legendre, séries de fonctions associées de Legendre, séries de polynômes de Laplace, avec leurs théorèmes de convergences et de sommabilités.

M. Jessel.

Fano (U.) et Racah (G.), **Séries tensorielles irréductibles. (Irreductible tensorial sets).** Un vol. relié 15,5 × 23,5, de 171 p., Academic Press, N. Y., 1959, prix $ 6.80. En anglais.

On appelle série tensorielle un ensemble de quantités qui subissent une transformation linéaire, quand on fait un changement de coordonnées — (chacune devient une fonction linéaire de l'ensemble). Cette notion englobe avec les tenseurs proprement dits, les coefficients de décomposition d'une fonction Ψ de la mécanique quantique en ses composantes si la valeur propre correspondante est dégénérée, ses composantes elles-mêmes, etc... L'ouvrage commence par l'étude algébrique de cette notion, et la deuxième partie examine les applications à la mécanique quantique, puis des appendices. La notion de série tensorielle englobe celle de spineur ; la référence aux spineurs n'est faite que dans une annexe vers la fin de l'ouvrage. Y a-t-il avantage à rendre plus générales et moins précises les notions étudiées ? Le livre actuel constitue-t-il un progrès par rapport au classique " Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik " de Van der Waerden ? Un analyste peut seul répondre avec autorité.

J. Winter.

MESURE DU RENDEMENT DE FLUORESCENCE DE LA COUCHE K DANS L'ALUMINIUM

Par F. SUZOR et G. CHARPAK,
Laboratoire de Synthèse Atomique, C. N. R. S.

Résumé. — La méthode décrite permet la mesure du rendement de fluorescence de la couche K des éléments de faible numéro atomique. Pour l'aluminium, on obtient $R_K = (4,5 \pm 0,2)\ 10^{-2}$. On emploie la technique du compteur proportionnel.

Abstract. — A method is described which allows precise measurement of K-shell fluorescence yield of low atomic number elements. For aluminium the value found is $R_K = (4,5 \pm 0,2)\ 10^{-2}$. Proportional counter technique is employed.

I. **Principe de la mesure.** — Cette mesure est effectuée à l'aide du spectromètre nucléaire à compteurs proportionnels [1] que nous avons construit. Dans le cas présent, seul un des deux compteurs est utilisé, et le principe de la mesure est le suivant : une source de fer 55 émettant des rayons X de 5,9 keV est placée sur la paroi du compteur et séparée du gaz uniquement par une feuille d'aluminium d'épaisseur a. Les dimensions du compteur sont assez grandes pour que le rayonnement X soit pratiquement compté dans un angle solide 2π. L'absorption des photons de 5,9 keV dans l'écran d'aluminium se produit principalement par effet photoélectrique dans la couche K et les rayons X de 1,5 keV qui en résultent sont aussi comptés dans le compteur avec un angle solide 2π. Le rapport y des intensités des photons de 1,5 keV et de 5,9 keV en fonction de l'épaisseur a de l'écran permet une mesure directe du rendement de fluorescence R_K dans l'aluminium.

II. **Calcul théorique du rapport y.** — Traitons d'abord le cas de l'absorption du rayonnement X dans une géométrie 2π. La source S a une intensité I dans un angle solide 4π ; nous allons calculer

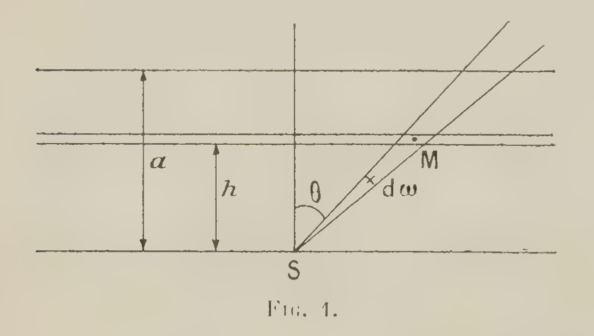


FIG. 1.

l'intensité $P(a)$ dans l'angle solide 2π après traversée de l'écran plan indéfini d'épaisseur a. μ_1 étant le coefficient d'absorption du rayonnement, le flux sortant dans l'angle solide $d\omega$ compris entre les cônes d'angle au sommet θ et $\theta + d\theta$ est, après traversée de l'écran

$$\frac{I}{2} \sin \theta\, e^{-\mu_1 a/\cos\theta}\, d\theta$$

d'où en intégrant dans l'angle solide 2π.

$$P(a) = \frac{I}{2} f(\mu_1 a)$$

en posant

$$f(z) = z \int_0^{1/z} e^{-1/x}\, dx.$$

Un photon primaire de 5,9 keV étant absorbé en M, dans l'écran d'aluminium, il existe une probabilité ρ d'émission d'un photon K de 1,5 keV, dont le coefficient d'absorption est μ_2. Dans le volume élémentaire contenu dans l'angle solide $d\omega$ et compris entre les plans h et $h + dh$, il y a émission de

$$\frac{I}{2} \rho\, \mu_1\, e^{-\mu_1 h/\cos\theta} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, d\theta\, dh$$

photons secondaires K de 1,5 keV. Compte tenu de l'absorption de ces photons en géométrie 2π à travers l'écran d'épaisseur $(a - h)$, on obtient après intégration l'intensité $S(a)$ des photons secondaires sortant de l'écran d'aluminium

$$S(a) = \frac{I}{4} \mu_1\, \rho \int_0^a f[(\mu_2(a - h)]\, g(\mu_1 h)\, dh$$

en posant

$$g(z) = \int_0^{\frac{1}{z}} e^{-1/x}\, (dx/x).$$

Ayant par définition $y(a) = S(a)/P(a)$, il est alors facile de calculer, point par point, la courbe $y(a)/\rho$ en fonction de a, sachant que $\mu_1 = 120\ cm^2/g$ pour les photons de 5,9 keV et que $\mu_2 = 330\ cm^2/g$ pour les photons de 1,5 keV ; la forme de cette courbe dépend seulement de μ_1 et de μ_2.

III. **Détermination expérimentale du rapport y.** — Les sources de fer 55 sur les différents écrans d'aluminium ont été obtenues par vaporisation

sous vide. Ces sources sont réparties uniformément au centre de l'écran d'aluminium et contiennent une quantité assez faible de matière pour que les électrons Auger de 5,3 keV émis par le fer 55 apparaissent sous forme d'une raie peu élargie et peu abaissée en énergie, comme le montre le spectre reproduit sur la figure 2 ; celui-ci a été obtenu

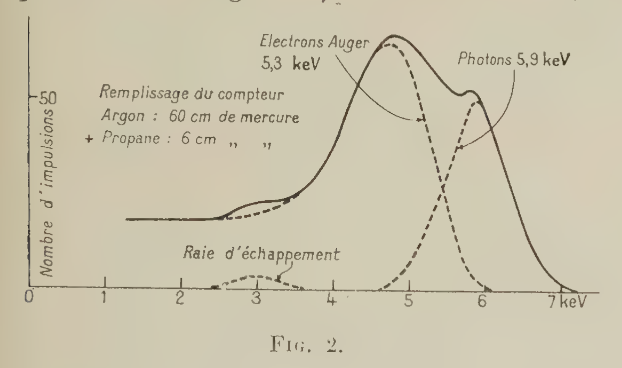


Fig. 2.

avec une source directement en contact avec le gaz du compteur.

Dans les expériences destinées à la mesure du coefficient de fluorescence, ces électrons Auger n'apparaissent plus, étant absorbés par l'écran d'aluminium. Les impulsions données par le compteur sont, après amplification, analysées dans un sélecteur à 50 canaux ; la forme du spectre obtenu pour un écran d'aluminium, $a = 0{,}78$ mg/cm² est donnée à titre d'exemple sur la figure 3. Ce spectre correspond à un remplissage du compteur par du propane sous une pression de 57 cm de mercure ; l'efficacité pour les photons de 1,5 keV est alors égale à l'unité et celle pour les photons de 5,9 keV est égale à 0,142 ; cette valeur a été mesurée par comparaison avec le cas où le remplissage du compteur était fait avec de l'argon sous 60 cm de mercure et du propane sous 6 cm, l'efficacité des photons de 5,9 keV étant alors égale à l'unité ; en outre cette valeur expérimentale est en accord avec la valeur calculée connaissant les dimensions du compteur. La valeur de $P(a)$ est déduite de l'aire de la raie de 5,9 keV sur le spectre de gauche, compte tenu de l'efficacité indiquée ; le spectre de droite avec une amplification double fournit avec précision la valeur de $S(a)$, déduite de l'aire de la raie de 1,5 keV. La présence d'un fond n'est pas gênante et ne nuit pas à la précision de la détermination de $S(a)$, l'interpolation du fond étant choisie de façon à obtenir une raie symétrique et de résolution connue ; la forme de ce fond a été contrôlée en remplaçant l'écran d'aluminium par un écran de béryllium.

La mesure de $y(a)$ a été faite pour plusieurs valeurs de a. A ce sujet, nous devons mentionner que des résultats cohérents et reproductibles n'ont pu être obtenus que si l'écran d'épaisseur a était constitué d'une seule feuille d'aluminium ; la présence de plusieurs feuilles d'aluminium, entraînant des boursouflures et des vides inévitables entre les feuilles, avait pour effet de détruire les conditions simples d'une géométrie 2π.

IV. **Détermination du rendement de fluorescence.** — Les valeurs expérimentale de y sont reportées

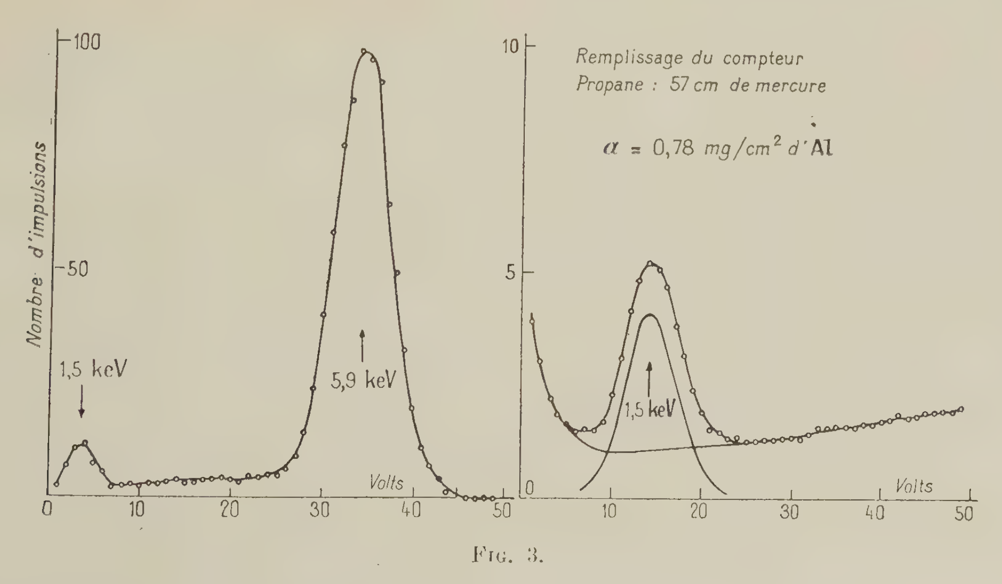


Fig. 3.

sur la figure 4 ainsi que la courbe théorique correspondant à $\rho = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ donnant le meilleur accord avec les points expérimentaux.

En possession de cette valeur de ρ, il nous faut maintenant obtenir le coefficient de fluorescence R_K. A partir de la discontinuité K de la courbe représentant le coefficient d'absorption des photons dans l'aluminium en fonction de l'énergie, nous tirons la valeur $N_K/N = 0{,}92$ pour la probabilité d'ionisation dans la couche K. La diffusion con-

tribue pour 1,3 % dans la section efficace d'absorption en bonne géométrie du rayonnement X du

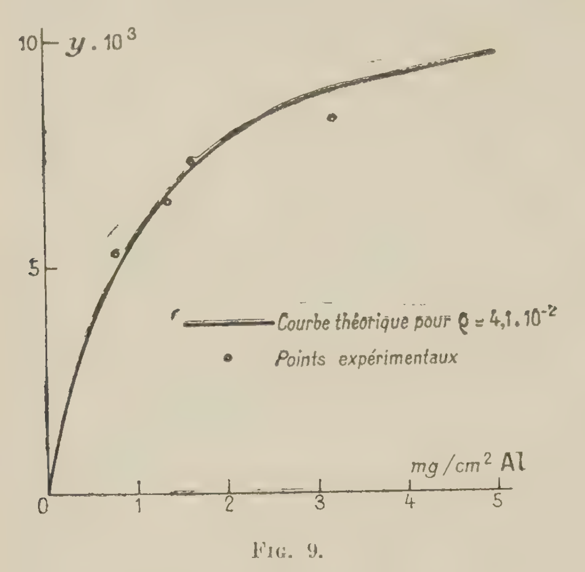


Fig. 9.

fer 55 dans l'aluminium ; comme dans notre cas une partie du rayonnement diffusé contribue aussi à l'ionisation de la couche K de l'aluminium, nous négligerons cet effet qui est certainement inférieur aux erreurs expérimentales. Nous négligerons aussi, parce qu'il est d'un ordre de grandeur très inférieur, l'ionisation dans la couche K par des électrons Auger de 5,3 keV ou des photoélectrons de 4,3 keV. Nous avons, dans ces conditions, la relation :

$$R_K = \rho/0,92$$

qui nous donne :

$$R_K = (4,5 \pm 0,2)\ 10^{-2}.$$

V. **Discussion générale sur le rendement de fluorescence R_K.** — La valeur théorique du rendement de fluorescence R_K [2, 3, 4] est de la forme

$$\left(\frac{R_K}{1 - R_K}\right)^{\frac{1}{4}} = A + BZ + CZ^3$$

où A correspond à une correction due à l'effet d'écran, CZ^3 à une correction relativiste, tandis que le terme principal BZ traduit la dépendance en Z^4 des transitions dépolaires. Différents auteurs ont publié des valeurs des coefficients A, B et C telles que la formule précédente rende le mieux compte des valeurs expérimentales connues de R_K. La dernière publication en date est celle de Laberigue-Frolow et Radvanyi [5] qui donne :

$$A = -0,0217 \quad B = +0,03318 \quad C = -1,14.10^{-6}$$

l'accord avec l'expérience est satisfaisant pour $Z > 25$.

Pour les valeurs de Z inférieures à 20, les résultats expérimentaux sont très dispersés comme le montre le tableau suivant :

Élément	Z	$R_K.10^2$					
C	6	0,09 [6]					
N	7	0,15 [6]					
O	8	0,22 [6]	8,2 [10]				
Ne	10	8,1 [6]	8,3 [10]				1,8 [15]
Mg	12			1,3 [11]	0,9 [17]		
Al	13				0,8 [17]		
Si	14			3,8 [11]			
S	16	15 [8]		8,3 [11]			
Cl	17	4 [7]		10,8 [11]			
A	18	7 [9]	14,9 [10]	7,7 [12]	6 [13]	12,3 [14]	12,9 [15]

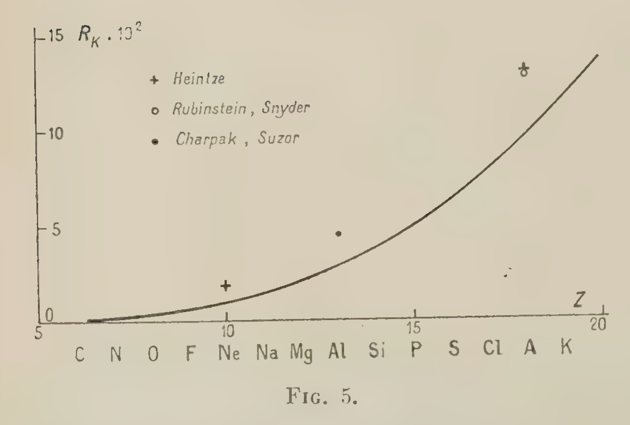


Fig. 5.

Nous avons représenté sur la figure 5, la courbe semi-empirique obtenue avec les valeurs de A, B et C précédemment citées et nous y avons reporté en plus de notre détermination de R_K pour l'aluminium, les valeurs récentes obtenues par Heintze [15] qui a employé comme nous la technique du compteur proportionnel ; nous avons ajouté aussi la valeur obtenue pour l'argon par Rubinstein et Snyder [16] à l'aide d'un calcul théorique rigoureux. Tous ces résultats sont en accord pour indiquer des valeurs supérieures à celles de la courbe semi-empirique, et s'en écartant d'autant plus en valeur relative que Z est plus petit.

Ce travail a été accompli grâce aux moyens mis à notre disposition par le Centre National de la Recherche Scientifique et à une subvention du Commissariat à l'Énergie Atomique.

Manuscrit reçu le 29 octobre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHARPAK (G.) et SUZOR (F.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 167 A.
[2] BURHOP, *Proc. Roy. Soc.*, 1936, A **147**, 272.
[3] PINCHERLE, *Nuovo Cimento*, 1935, **12**, 81.
[4] MASSEY et BURHOP, *Proc. Roy. Soc.*, 1936, 1, **153**, 661.
[5] LABERRIGUE-FROLOW et RADVANYI, *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 944.
[6] CRANE (W.), *Ann. Physik*, 1936, **27**, 405.
[7] WEINER, KURBATOV et POOL, *Phys. Rev.*, 1944, **66**, 209.
[8] LAY (H.), *Z. Physik*, 1934, **91**, 533.
[9] AUGER (P.), *Ann. Physique*, 1926, **6**, 183.
[10] LOCHER (G. L.), *Phys. Rev.*, 1932, **40**, 484.
[11] HAAS (M.), *Ann. Physik*, 1933, **16**, 473.
[12] MARTIN, BOWER et LABY, *Proc. Roy. Soc.*, 1935, 1, **148**, 301.
[13] CURRAN, ANGUS et COCKROFT, 1949. Cf. BURHOP, The Auger Effect, Cambridge University Press, 1957.
[14] DEXTER (D. L.) et BEEMAN (W. W.), *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 456.
[15] HEINTZE (J.), *Z. Physik*, 1955, **143**. 153.
[16] RUBINSTEIN (R. A.) et SNYDER (S. N.), *Phys. Rev.*, 1955, **97**, 1653.
[17] RIGHTMIRE (R. A.), *Thesis.* Report of United States Atomic Energy Commission, NYO 6633, 1957.

REVUE DES LIVRES

MACCONNELL (J.), **Dynamique des particules quantiques (Quantum particle dynamics).** Un vol. relié de 252 p., 16 × 23 cm, North-Holland Publ. Company, Amsterdam, 1958. En anglais, prix Fl. 20.

Un excellent ouvrage d'enseignement, clair et de lecture très agréable. Il couvre la mécanique quantique ordinaire, la théorie de Dirac, l'application aux phénomènes de rayonnement, les théories de l'effet photoélectrique et de l'émission des rayons X par freinage, et enfin aboutit à la théorie des forces nucléaires, et au calcul des phénomènes de haute énergie et à la théorie des mésons. Le dernier chapitre est consacré à la diffusion des mésons, production et annihilation des pions, des protons négatifs. Les éléments de matrice donnant les probabilités de ces phénomènes sont calculés. Tout cela en 250 pages, en partant de la relativité restreinte et de la théorie de l'onde de Broglie. Nous ne saurions assez recommander la lecture d'un tel ouvrage, qui rendra service à tous, professeurs et étudiants.

J. WINTER.

DOREMUS (R. H.), ROBERTS (B. W.) et TURNBULL (D.), **Croissance et perfection des cristaux. (Growth and Perfection of Crystals.)** 1 vol. 21 × 28 cm, 609 pages, John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1958, $ 12,50.

A une époque où les cristaux jouent un rôle de plus en plus grand dans les diverses sciences, toute conférence internationale sur leur croissance et leur perfection est un événement important. Le présent recueil est la transcription des communications et discussions présentées à la Conférence internationale de Cooperstown (N. Y.) du 27 au 29 août 1958 par les spécialistes des États-Unis, du Royaume-Uni, d'Allemagne et de Belgique.

Un grand nombre de papiers concernent le problème de l'origine des imperfections linéaires dans la croissance cristalline. A ce propos des résultats récents ont été présentés sur les « poils » cristallins (whiskers) dont les propriétés élastiques sont « parfaites ».

D'autres communications décrivent les mécanismes par lesquels des dislocations peuvent être introduites dans les cristaux, soit par précipitation de vacances, soit durant la cristallisation même.

Certains auteurs indiquent comment on peut faire croître des grands cristaux apparemment dénués de dislocation.

Les conférenciers remarquent que pour comprendre le problème de la croissance cristalline, de gros efforts doivent encore être portés sur l'étude de l'interface liquide-solide et de la nature de l'état liquide. Quelques remarques sont présentées à ce sujet.

De nouvelles explications sont présentées sur le problème de la croissance dendritique, cependant certains mécanismes restent encore obscurs.

Quelques exposés commencent à jeter une lumière sur le rôle obscur joué par les impuretés sur la vitesse de croissance et sur la morphologie du cristal.

Enfin les cristallographes des hauts polymères ont pu confronter leur expérience avec leurs collègues des cristaux plus usuels.

Signalons que les participants ont tenu à présenter leurs plus beaux clichés, les non spécialistes pourront les admirer avec profit dans cette édition remarquablement présentée.

Un seul reproche technique : quelques défauts de brochage (dans l'exemplaire qui nous a été confié, une dizaine de pages étaient mal découpées, dans un autre, un cahier de trente-deux pages manquait tandis qu'un autre était en double). Admirons pour terminer avec quelle rapidité la General Electric s'est chargée de publier cette importante conférence.

Y. LE CORRE.

HERZBERGER (M.), **Optique géométrique moderne. (Moderne geometrical Optics)** (en anglais). Un vol. relié de 504 p., 15 × 24 cm, Interscience publishers, New-York, 1958, prix $ 15.

Cet ouvrage est un traité conçu pour les réalisateurs. Le formalisme mathématique est simple, et expliqué en fin d'ouvrage par un appendice. Les formules mathématiques employées sont calculables par machine électronique à grande vitesse. Partie I : Marche d'un rayon à travers un système optique. Partie II : Optique de Gauss. Approximation du premier ordre. On introduit un nouveau symbole : Les crochets de Gauss. Partie III : Lois générales, principes de Hamilton et Lagrange. Partie IV : Systèmes concentriques. Partie V : Systèmes ayant la symétrie de rotation autour d'un axe. Partie VI : Théorie approximative pour un système normal. Partie VII : Théorie des erreurs sur l'image des troisième et cinquième ordre. Partie VIII : On développe un modèle mathématique ; On trace certains rayons, méridiens et obliques, ce qui donne une formule valable au 5e ordre, puis on l'utilise comme formule d'interpolation. Partie IX: Milieux non homogènes. Partie X : Appendice mathématique. La présentation est claire.

J. WINTER.

DÉPLACEMENTS ISOTOPIQUES DANS LE SPECTRE D'ARC DU TUNGSTÈNE

Par JEAN BLAISE et GILBERT GLUCK,
Laboratoire Aimé-Cotton, C. N. R. S., Bellevue (Seine-et-Oise).

Résumé. — De la raie 5 642 Å ($d^4s^2\ {}^5D_1$ — $d^4\ sp\ {}^7F^{\circ}_0$), on a déduit le déplacement isotopique relatif des 4 isotopes abondants de W. La position relative de ^{180}W par rapport à ^{186}W à ^{184}W a été mesurée dans 4 raies intenses du type d^4s^2 — $d^4\ sp$. Les positions relatives des isotopes sont : (186) : 0 ; (184) : 1 ; (183) : 1,54 ± 0,02 ; (182) : 2,13 ± 0,02 ; (180) : 2,92 ± 0,05. La position anormale de ^{182}W entraîne l'inversion du phénomène de « odd-even staggering ».

La mesure du déplacement isotopique de plusieurs centaines de raies permet de poursuivre la classification du spectre d'arc où 6 types de transitions ont déjà été reconnus.

La valeur de la constante de déplacement isotopique pour la paire d'isotopes ^{184}W — ^{186}W est : $\beta\ C_{exp} = 117 \pm 20$ mK.

Abstract. — From the line 5 642 Å ($d^4\ {}^5s^2\ D_1$ — $d^4\ sp\ {}^7F^{\circ}_0$), the relative isotope shift of the four abundant isotopes of W has been determined. The relative position of ^{180}W with respect to ^{186}W and ^{184}W has been measured in four strong lines of the type $d^4\ s^2$ — $d^4\ sp$. The relative positions of the isotopes are : (186) : 0 ; (184) : 1 ; (183) : 1,54 ± 0,02 ; (182) : 2,13 ± 0,02 ; (180) : 2,92 ± 0,05. The abnormal position of ^{182}W implies the inversion of the phenomenon of odd-even staggering.

The measurement of the isotope shift of several hundred lines allows a further classification of the arc spectrum where 6 types of transitions are already recognized.

The value of the isotope shift constant for the pair of isotopes ^{184}W — ^{186}W is

$\beta\ C_{exp} = 117 \pm 20$ mK.

I. Introduction. — Le déplacement isotopique dans le spectre d'arc du tungstène a été étudié dans plusieurs laboratoires depuis une douzaine d'années, en utilisant soit du tungstène naturel, soit du tungstène enrichi en ^{183}W ou en ^{180}W. D'après Williams et Yuster [1], les abondances relatives des isotopes du tungstène naturel sont les suivantes :

TABLEAU I

Isotopes	180	182	183	184	186
Abondances	0,135	26,4	13,4	30,6	28,4

Les abondances des isotopes pairs 182, 184 et 186, apparaissent très favorables pour faire des mesures de déplacements isotopiques. Malheureusement, l'isotope impair a un spin 1/2 et se sépare donc en deux, trois ou quatre composantes suivant la transition étudiée, et dans la grande majorité des cas, les deux composantes les plus intenses coïncident approximativement l'une avec la composante de ^{182}W, l'autre avec celle de ^{184}W. Il en résulte que la mesure de la séparation (186-184) et surtout celle de la séparation (184-182) devient très difficile et que le déplacement isotopique relatif mesuré entre les trois isotopes risque donc fort de varier avec la raie étudiée. Quant à l'isotope 180, deux cent fois moins intense que son voisin immédiat, il pose lui aussi un problème délicat si l'on ne dispose pas d'isotope enrichi ou d'un dispositif interférométrique à grand contraste.

Toutes les raies dont le déplacement isotopique a été mesuré avec précision correspondent à des transitions

$5d^4\ 6s^2$ — $5d^4\ 6s6p$ ou $5d^5\ 6s$ — $5d^3\ 6s^2\ 6p$,

ce dernier type de transition ayant été reconnu par Murakawa [2] en raison de la grandeur et du sens du déplacement isotopique observé.

Tandis que Kopfermann et Meyer [3] et Murakawa [2], [4] ont utilisé du tungstène naturel, Vreeland et Murakawa, dans un travail effectué en 1951 [5] et repris en 1958 [6], utilisèrent des échantillons enrichis en ^{183}W et en ^{180}W et Barr et Jenkins [7] employèrent un échantillon enrichi en ^{180}W. Nous avons rassemblé dans le tableau II les déplacements isotopiques relatifs mesurés par ces auteurs, en prenant comme unité la séparation (184-186) ; la précision a été indiquée chaque fois que les données des auteurs le permettaient.

TABLEAU II

AUTEURS	186	184	183	182	180
K. M. (1947)	0	1		2,11	
V. M. (1951)	0	1		2,13	3,15
M. (1953)	0	1		2,206 ± 0,010	
M. (1956)	0	1		2,206 ± 0,010	3,08 ± 0,07
B. J. (1956)	0	1		$2{,}13_6$	2,91
V. M. (1958)	0	1		$2{,}20_5$ ± 0,03	2,98 ± 0,10

On voit que la moitié des résultats indique que la séparation (184-182) est supérieure de 11 à 14 %

à la séparation (186-184), tandis que l'autre moitié donne un écart de 21 % entre les deux séparations. Pour la position relative de l'isotope 180, la dispersion des résultats est du même ordre. Quant à l'isotope 183, Kopfermann et Meyer pensent qu'en raison du phénomène de « odd-even staggering », il doit se trouver plus près de l'isotope 182 que de l'isotope 184 ; Murakawa se basant sur son analyse de la raie 4 269 Å ($d^5\,s\,{}^7S_3$ — $d^3\,s^2\,p\,263^{\circ}_2$) estime qu'il est équidistant des deux isotopes pairs qui l'encadrent.

Dans ces conditions, il nous a paru intéressant d'étudier une raie du spectre d'arc dans laquelle l'isotope impair ne présente pas de structure hyperfine. Il est bien connu que les termes spectraux appartenant à des configurations $d^x\,s^2$ ont des structures hyperfines négligeables et que dans le cas du tungstène, les structures hyperfines observées doivent être attribuées aux termes des configurations $d^4\,sp$ ou $d^5\,s$. Il suffit donc d'étudier une transition entre un terme de la configuration $d^4\,sp$ pour lequel $J = 0$ et un terme $d^4\,s^2$ ayant un $J = 1$. D'après la classification de Laporte et Mack [8], la raie la plus intense de ce type est la raie 5 642 Å ($d^4\,s^2\,{}^5D_1$ — $d^4\,sp\,{}^7F^{\circ}_0$) : c'est donc celle que nous avons étudiée.

II. **Résultats expérimentaux.** — 1° DÉPLACEMENTS ISOTOPIQUES RELATIFS. — Nous avons utilisé une cathode creuse de Schüler démontable. On a introduit une mince feuille de tungstène enroulée sur elle-même dans le pot cathodique en duralumin ; en se déroulant, la feuille s'applique sur la paroi interne du tube assurant un bon contact thermique. Un petit disque de tungstène a été ensuite poussé à force jusqu'au fond du pot cathodique. En utilisant le néon comme gaz support de la décharge, une intensité de courant de 40 mA suffit pour exciter la quasi totalité des raies classées par Laporte et Mack, la cathode étant refroidie à l'azote liquide.

Les enregistrements de la raie ont été effectués à l'aide du spectromètre Fabry-Perot [9]. Nous tenons à remercier M. le Pr D. A. Jackson qui nous a aimablement prêté un étalon d'une qualité optique remarquable.

La figure 1 montre un enregistrement obtenu avec une constante de temps de 3,3 sec, la durée de balayage d'un ordre de 36 minutes.

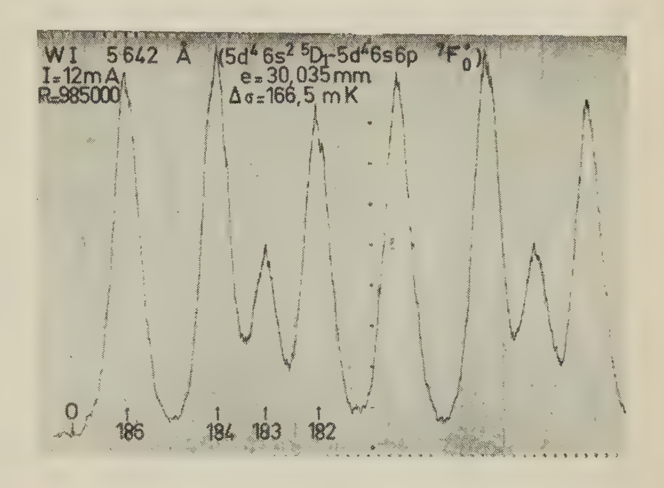


FIG. 1.

La largeur à mi-hauteur des quatre composantes visibles est identique et égale à 18,0 mK (1 mK = 10^{-3} cm^{-1}) ; quant à leurs intensités relatives, elles sont exactement celles indiquées par Williams et Yuster [1], ce qui permet de conclure que les deux composantes de l'isotope 183 coïncident et que, comme prévu, le terme $5d^4\,6s^2\,{}^5D_1$ a une structure hyperfine nulle.

Dans ces conditions, la mesure des distances entre composantes fournit directement les déplacements isotopiques relatifs des quatre isotopes les plus importants du tungstène. En raison de sa faible intensité, il n'est évidemment pas question de déceler l'isotope 180 qui, avec l'épaisseur d'étalon choisie, tombe sous la composante ^{186}W d'ordre d'interférence inférieur. Le tableau III indique les résultats obtenus.

TABLEAU III

Isotopes	186	184	183	182
Position des composantes (en mK)	0	55,0 ± 0,3	84,5 ± 0,5	117,0 ± 0,3
Déplacements isotopiques relatifs	0	1	1,54 ± 0,02	2,13 ± 0,02

Ces résultats ont été confirmés par les mesures que nous avons faites sur 22 raies intenses appartenant aux multiplets ${}^5D$ — ${}^7F^0$, ${}^5D$ — ${}^7D^0$ et ${}^5D$ — ${}^7P^0$ et dont la figure 2 montre un exemple.

Nous avons en outre étudié les raies 4 983 Å, 5 015 Å, 5 069 Å et 5 225 Å avec un étalon donnant un intervalle entre ordres de 240 mK. Avec une intensité de courant de 15 mA, ces raies deviennent si intenses que la distance (186-180) devient facilement mesurable avec une précision de ± 2 mK (la hauteur de la composante de ^{180}W est de 8 mm

sur notre enregistrement de la raie 4 983 effectuée dans ces conditions). Pour les quatre raies le rapport (186-180) : (186-184) = 2,92 ± 0,05.

Pour l'ensemble des isotopes stables du tungstène, les déplacements isotopiques relatifs sont donc les suivants :

TABLEAU IV

Isotopes	186	184	183	182	180
Déplacements isotopiques relatifs	0	1	1,54 ± 0,02	2,13 ± 0,02	2,92 ± 0,05

La comparaison avec le tableau I montre le complet accord avec les résultats de Barr et Jenkins

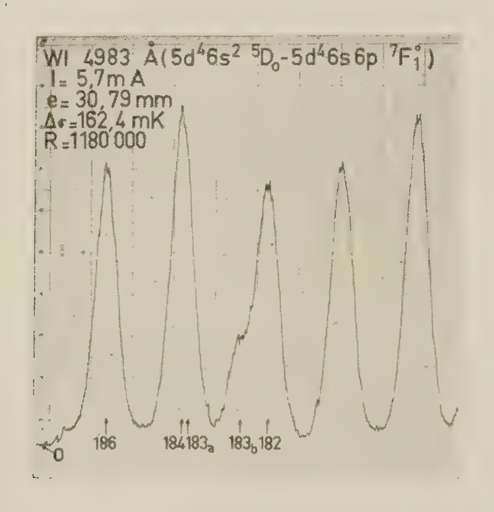


Fig. 2.

pour tous les isotopes pairs et avec Kopfermann et Meyer et les premiers résultats publiés par Vreeland et Murakawa pour les isotopes 182, 184 et 186.

2° Position relative de l'isotope impair par rapport aux isotopes pairs. — La séparation (182-183) est supérieure de 10 % à la séparation (183-184), alors que dans tous les éléments étudiés jusqu'à présent, on constate le déplacement de l'isotope impair vers l'isotope pair léger. En fait, c'est la position relative de l'isotope 182 par rapport aux autres isotopes pairs qui est anormale. Elle indique que le carré du paramètre de déformation du noyau décroît beaucoup plus rapidement entre les isotopes 180 et 182 qu'entre les isotopes 182 et 184 ou 184 et 186. De plus, comme $(183\text{-}184) > \frac{1}{2}(184\text{-}186)$, cela confirme bien la position anormale de l'isotope 182 par rapport à tous les autres isotopes.

III. **Déplacements isotopiques des termes spectraux du spectre d'arc : Résultats préliminaires.** — Nous avons entrepris en 1957 de contrôler et d'étendre la classification du spectre d'arc du tungstène en utilisant les résultats fournis par l'étude des déplacements isotopiques. Dans ce but, il suffit de s'intéresser au déplacement isotopique des deux isotopes les plus abondants ^{184}W et ^{186}W. Nous nous contenterons de donner dans les paragraphes suivants, un résumé des résultats déjà obtenus, les résultats complets devant être publiés ultérieurement.

Nous avons déjà mesuré le déplacement isotopique de plusieurs centaines de raies entre 3 700 et 6 000 Å. Parmi ces raies, les deux tiers environ ont été classées par Laporte et Mack [8] et leur classification a été généralement confirmée. Quand plusieurs classifications sont proposées pour la même raie la mesure du déplacement isotopique permet de choisir celle qui convient. Les nouveaux niveaux indiqués dans Atomic Energy Levels [10] ont permis de retrouver la classification d'un certain nombre de raies. Enfin nous avons trouvé de nouveaux termes spectraux impairs, mais jusqu'à présent, aucun nouveau terme appartenant aux configurations $5d^4\,6s^2$ ou $5d^5\,6s$.

Dans les dix raies mesurées du multiplet $5d^4\,6s^2\,{}^5D — 5d^4\,6s6p\,{}^7F^o$, le déplacement isotopique ne varie que de — 52 à — 55 mK, ce qui permet de conclure à l'absence de perturbations du multiplet fondamental et du multiplet impair le plus profond par des termes d'autres configurations électroniques et nous considérons donc la valeur $\delta\sigma(184\text{-}186) = -55$ mK comme caractéristique des transitions $d^4\,s^2 — d^4\,sp$. Des déplacements isotopiques — 45 mK mesuré dans la raie 4 071 Å ($d^4\,s^2\,{}^5D_1 — d^4\,sp\,{}^7P^o_2$) et + 25 mK mesuré dans la raie 4 295 Å ($d^5\,s\,{}^7S_3 — d^4\,sp\,{}^7P^o_2$), on déduit la relation $\delta T(d^4\,s^2) — \delta T(d^7\,s) = 69$ mK. Si l'on suppose en outre que le rapport

$$\frac{\delta T(d^4\,sp)}{\delta T(d^5\,s)} \sim 1{,}20$$

comme dans les éléments voisins [11], [12], on est conduit à attribuer à la configuration $5d^5\,6s$ un déplacement isotopique de + 70 mK par rapport à la configuration $5d^5$.

Nous avons indiqué dans le tableau V les déplacements isotopiques caractéristiques des différents types des transitions étudiés.

TABLEAU V

TRANSITION	$\delta\sigma$ (184-186)
$5d^4\,6s^2$ — $5d^4\,6s6p$	— 55
$5d^5\,6s$ — $5d^4\,6s6p$	+ 14
$5d^5\,6s$ — $5d^3\,6s^2\,6p$	+ 8
$5d^4\,6s^2$ — $5d^3\,6s^2\,6p$	+ 12
$5d^4\,6s6p$ — $5d^4\,6s7s$	~ + 10
$5d^3\,6s^2\,6p$ — $5d^4\,6s7s$	~ — 40

IV. **Attribution de configurations électroniques aux termes spectraux.** — Toutes les configurations électroniques indiquées dans Atomic Energy Levels [10] sont confirmées à l'exception des suivantes :

1° Les termes 19 535,04 K, et 19 826,04 K classés respectivement $d^5 s\,^5G_5$ et $f^4 s^2\,^3G_5$ doivent être permutés et l'ordre des niveaux du quintuplet est maintenant $^5G_2$, $^5G_3$, $^5G_4$, $^5G_6$ et $^5G_5$ au lieu de l'ordre normal. Les valeurs trouvées pour les déplacements isotopiques des termes $d^4 s^2\,^3G_5$ et $d^5 s\,^5G_5$ confirment leur perturbation mutuelle.

2° Les raies ultimes du spectre d'arc ne sont pas des transitions $d^5 s\,^7S_3$ — $d^5 p\,^7P^{\circ}_{2,3,4}$, mais bien des transitions $d^5 s$ — $d^4 sp$, comme le pensaient Laporte et Mack [8]. Le terme $^7P^{\circ}_2$ est même légèrement perturbé par un terme de la configuration $d^3 s^2 p$.

3° La configuration $d^3 s^2 p$ fait son apparition avec le terme 25 983,60 K, classé antérieurement $d^4 sp\,^5F_0$. De nombreux autres termes de cette configuration ont été identifiés. Par contre, aucun terme de la configuration $d^5 p$ n'a été trouvé jusqu'à présent.

V. **Constante de déplacement isotopique.** — Le déplacement isotopique de 70 mK que nous avons attribué à la configuration $d^5 s$ pour le couple d'isotopes 184-186 est précisément la valeur admise antérieurement par Brix et Kopfermann [13] pour le couplage d'isotopes 182-184.

En utilisant la valeur de

$$\frac{1}{n_a^3(6s)}\cdot\frac{dn_a}{dn} = 0{,}596 \pm 0{,}06$$

évaluée par ces auteurs et les déplacements isotopiques relatifs déterminés au début de cet article, on peut calculer la constante de déplacement isotopique expérimentale pour chaque couple d'isotopes pairs définie par la formule

$$\beta\, C_{\text{exp}} = \frac{\beta\,\delta T_{6s}}{\dfrac{1}{n_a^3(6s)}\cdot\dfrac{dn_a}{dn}},$$

et la comparer à la constante de déplacement isotopique dû à l'effet de volume, C_{th}, calculée pour $R_0 = 1{,}20.10^{-13}$ cm.

TABLEAU VI

COUPLES D'ISOTOPES	180-182	182-184	184-186
$\beta\, C_{\text{exp}}$ (mK)	93	133	117
C_{th} (mK)	310	308	306
$C_{\text{exp}}/C_{\text{th}}$	0,30	0,43	0,38

Il semble que les valeurs de $\beta\, C_{\text{exp}}$ puissent être considérées comme correctes à mieux de 20 % près.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à M. le Pr P. Jacquinot sous la direction duquel ce travail a été effectué. Nos remerciements s'adressent également à Mme M. Diringer-Louvegnies et à M. S. Gerstenkorn pour le concours qu'ils nous ont apporté dans la partie expérimentale de ce travail et à MM. P. Giacomo et S. Roizen qui ont préparé les couches diélectriques des étalons que nous avons utilisés.

Manuscrit reçu le 27 décembre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] WILLIAMS (D.) et YUSTER (P.), *Phys. Rev.*, 1946, **69**, 556.
[2] MURAKAWA (K.), *J. Phys. Soc.*, Japan, 1953, **8**, 215.
[3] KOPFERMANN (H.) et MEYER (D.), *Z. Physik*, 1947, **124**, 685.
[4] MURAKAWA (K.), *J. Phys. Soc.*, Japan, 1956, **11**, 778.
[5] VREELAND (J. A.) et MURAKAWA (K.), *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 229.
[6] VREELAND (J. A.) et MURAKAWA (K.), *J. Phys. Soc.*, Japan, 1958, **13**, 663.
[7] BARR (W. L.) et JENKINS (F. A.), *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1956, **1**, 839.
[8] LAPORTE (O.) et MACK (J. E.), *Phys. Rev.*, 1943, **63**, 246.
[9] BLAISE (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 335.
[10] MOORE (C. E.), Atomic Energy Levels, Circular Nat. Bur. Stand., 1958, 467 vol. III.
[11] BLAISE (J.), *Thèse*, Paris, 1957, en cours de publication aux *Annales de Physique*.
[12] STEUDEL (A.), *Z. Physik*, 1958, **152**, 599.
[13] BRIX (P.) et KOPFERMANN (H.), *Festschrift Akad. Wiss.*, Göttingen, 1951, 17.

ÉTATS D'UNE PAIRE D'ISOBARES

Par R. NATAF,
Collège de France, Orsay.

Résumé. — On étudie la dégénérescence des états de deux particules isobares et de leurs antiparticules, en l'absence de champ électromagnétique :
1. Lorsque ces particules sont des Fermions (nucléons).
2. Lorsque ce sont des Bosons (mésons K).
La quantification des champs associés résultant de règles de commutation différentes, la dégénérescence est d'ordre plus élevé pour les Bosons ; elle porte sur les quatre états de particules et antiparticules. Les transformations possibles entre ces 4 états comprennent un sous-groupe homomorphe des rotations dans un espace à 4 dimensions ayant la métrique de Minkowski.
3. On compare enfin ces dégénérescences à celle qui résulte de l'ignorance de l'état de « charge » pour la paire neutrino-antineutrino à quatre états.

Abstract. — The degeneracy of the states of two isobaric particles (with their antiparticles), in the absence of any electromagnetic field, is analyzed within the frame of present field theory :
1. When these particles are Fermions (nucleons).
2. When they are Bosons (K mesons).
The quantization of the associated fields being then derived from different commutation rules, the degeneracy for Bosons has a higher order: it involves the four states of particles and antiparticles. The group of transformations between these states contains a sub-group homomorphic to rotations in a four dimension space with Minkowski metric.
3. These denegeracies are compared with that resulting from " charge " uncertainty on the four states of the neutrino-antineutrino pair.

A. États d'une paire de fermions isobares. — 1° Supposons que deux nucléons soient placés dans une enceinte isolée E, où il n'y a pas de champ électromagnétique appliqué. Ces deux nucléons semblent identiques : leur différence de masse est inférieure à l'erreur des mesures que l'on peut effectuer dans E. Cependant, l'étude expérimentale de leurs états possibles (au cours de leurs collisions, par exemple) montre qu'ils peuvent se trouver tous deux dans le même état quantique d'espace et de spin. Il faut donc admettre qu'ils correspondent à des états « intrinsèques » différents, soient p et n, orthonormaux. Comme nous ne savons pas en quoi diffèrent ces états, nous pouvons les remplacer par :

$$\begin{cases} p' = ap + bn \\ n' = cp + dn \end{cases} \quad (1)$$

eux-mêmes orthonormaux.

Si nous représentons p par $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, n par $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, et posons en général :

$$\zeta = \zeta_1 p + \zeta_2 n = \begin{pmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\end{pmatrix}$$

l'orthogonalité de ζ, η se traduit par ; $\zeta^\dagger \eta = 0$, ζ étant normé par $\zeta^\dagger \zeta = 1$.

On voit alors que :

$$U = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

doit être *unitaire*,

$$\begin{cases} |p'|^2 = 1 \text{ imposant : } |a|^2 + |b|^2 = 1 & (2) \\ |n'|^2 = 1 \text{ imposant : } |c|^2 + |d|^2 = 1 & (3) \\ p'^\dagger n' = 0 \text{ imposant : } ca^* + db^* = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) correspond à une dégénérescence des états de la paire isobare $\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}$ en l'absence de champ électromagnétique, qui est levée par l'application d'un tel champ : on distingue alors sans ambiguïté l'état p chargé et l'état n non chargé.

L'intérêt de (1) provient, on le sait, du fait que la dégénérescence n'est pas levée par les forces nucléaires ; ainsi, les nucléons d'un noyau léger sont pratiquement dans les conditions de E.

Mais on peut considérer les transformations unitaires (1), par le même raisonnement, *pour une paire quelconque d'isobares* qu'il est impossible de distinguer dans des conditions données — en particulier pour une paire de Bosons isobares de charges différentes, placés dans E : la fonction d'onde de l'ensemble n'étant pas toujours symétrique (d'espace), on pourrait voir encore qu'il y a deux états intrinsèques différents.

2° *Le groupe des transformations unitaires U de* (1) *définit le spin isobarique.* — En effet, substituant : $d = -c(ab^{-1})^*$ (5) de (4) dans (3), et tenant compte de (2), $|c| = |b|$; le groupe des U_2, unitaires à deux dimensions, dépend donc de

4 *paramètres réels*, (2, 3, 4) étant vérifiées pour :

$a = e^{iu}\cos\lambda$; $b = e^{iv}\sin\lambda$; $c = -e^{iw}\sin\lambda$, et (5).

Avec ces paramètres :

$$U = \begin{pmatrix} e^{iu}\cos\lambda & e^{iv}\sin\lambda \\ -e^{iw}\sin\lambda & e^{i(w+v-u)}\cos\lambda \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\frac{v+w}{2}} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\left(u-\frac{v+w}{2}\right)}\cos\lambda & e^{i\frac{v-w}{2}}\cos\lambda \\ -e^{i\frac{w-v}{2}}\sin\lambda & e^{i\left(\frac{v+w}{2}-u\right)}\cos\lambda \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, en posant : $\theta = \dfrac{v+w}{2}$:

$$\begin{cases} p' = e^{i\theta}(a_1 p + b_1 n) \\ n' = e^{i\theta}(-b_1^* p + a_1^* n) \end{cases}$$

où : $V = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1^* & a_1^* \end{pmatrix}$ a un déterminant 1.

Les matrices V, de déterminant 1 forment, on le sait, le sous-groupe *unitaire unimodulaire* de U_2, à 3 paramètres réels, homomorphe du groupe R_3 des rotations autour d'un point.

V prend la forme classique :

$$\underline{V = e^{i\frac{\gamma}{2}\tau_3}\, e^{i\frac{\beta}{2}\tau_2}\, e^{i\frac{\alpha}{2}\tau_3}} \qquad (6)$$

en fonction des matrices τ_i de Pauli et des « angles de rotation » $\alpha\beta\gamma$ tels que :

$$u - \frac{v+w}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2}, \quad \frac{w-v}{2} = \frac{\alpha-\gamma}{2}, \quad \lambda = \frac{\beta}{2}$$

et :

$$U = e^{i\theta}\, V. \qquad (7)$$

3° Cependant, à chacune des particules de la paire isobare, on peut associer son antiparticule, et, pour bien préciser la relation de « conjugaison de charge », nous nous restreindrons au cas d'une *paire de Fermions isobares*.

Dans E, en l'absence de conditions de seuil d'énergie, on ne pourrait pas savoir en quoi diffèrent les 4 états : p, n, p^c, n^c. Mais ces 4 états ne sont pas tous indépendants, et pour bien voir leurs relations, il faut examiner les transformation du type (1) dans le cadre de la théorie quantique des champs.

a) On peut toujours effectuer (1) sur les champs p, n initiaux que nous savons indépendants (sans savoir en quoi ils diffèrent) ; nous pouvons supposer que ces champs anticommutent :

$$\{ n^*, p \} = \{ p^*, n \} = 0$$

tandis que :

$$\{ p_i^*, p_j \} = \delta_{ij} F, \quad \{ n_i^*, n_j \} = \delta_{ij} F$$

(F fonction des coordonnées)

$$\{ p_i^*, p_j^* \} = \{ p_i, p_j \} = 0$$

et de même pour n. (8)

En imposant les mêmes relations d'anticommutation aux champs p', n' on retrouve alors les conditions (2) : relation (8) pour p', (3) : relation (8) pour n', et (4) : anticommutation de p' et n'.

b) On ne peut pas effectuer de transformation du type : $p'' = Ap + Bp^c$. Pauli [1] a montré que seule une transformation :

$$p'' = Ap + B\,\gamma_5\, p^c \qquad (9)$$

pourrait conserver les relations d'anticommutation, et celle-ci n'est pas compatible avec les équations d'évolution de Dirac :

$$(\gamma_\mu\, \partial_\mu - m_0)\, p = 0 \qquad (\gamma_\mu\, \partial_\mu - m_0)\, n = 0 \qquad (10)$$

que vérifient les champs p, n, ainsi que p^c, n^c, en général.

Par contre, des transformations :

$$\begin{cases} p' = ap + bn^c \\ n'^c = cp + dn^c \end{cases}$$

de matrice U_c unitaire sont possibles, les champs p et n^c étant indépendants.

En posant :

$$\xi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} p \\ n^c \end{pmatrix}$$

on a donc les transformations possibles :

$$(11) \qquad \xi' = U\,\xi \qquad \eta' = U_c\,\eta \qquad (12)$$

d'où :

$$(13) \qquad \xi'^c = U^*\,\xi^c \qquad \eta'^c = U_c^*\,\eta, \qquad (14)$$

(7) donne :

$$U^* = e^{-i\theta}\, V^* \qquad (15)$$

et l'on voit que le paramètre θ est associé au nombre de nucléons : si le Lagrangien est invariant par la transformation de jauge $\psi \to e^{i\theta}\psi$, $\psi^* \to \psi^* e^{-i\theta}$, celui-ci est constant (nombre de nucléons diminué du nombre d'antinucléons, comme le montre (13)).

Avec V^* seulement, (13) s'écrit :

$$\begin{cases} p'^c = a_1^* p^c + b_1^* n \\ n'^c = -b_1 p^c + a_1 n^c \end{cases}$$

ou :

$$\begin{cases} n'^c = a_1 n^c + b_1(-p^c) & (16) \\ (-p')^c = -b_1^* n^c + a_1^*(-p^c). & (16) \end{cases}$$

Si p, n correspondent aux valeurs propres $+1$, -1 de $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *$n^c$ correspond donc à $+1$, et p^c à -1.*

Remarquons enfin que la phase θ_c de U_c n'a pas de signification physique : elle est associée au nombre de protons et antineutrons, diminué du nombre d'antiprotons et neutrons.

On peut mettre en évidence les transformations simultanées V et V^* d'une part, V_c et V_c^* d'autre

part, en disposant les 4 états possibles de particules et antiparticules dans la matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} p \\ n \\ n^c \\ -p^c \end{pmatrix} \quad (17)$$

V, V^* sont obtenues à l'aide des matrices à 4 lignes et 4 colonnes :

$$\tau_i = \begin{pmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & \tau_i \end{pmatrix}$$

V_c, V_c^* de la même manière, à l'aide des matrices à 4 lignes, 4 colonnes :

$$\varkappa_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

où I est la matrice unité à 2 lignes, 2 colonnes.

Évidemment, les deux ensembles s'excluent mutuellement puisque le produit d'une transformation V et d'une transformation V_c permettrait de combiner n et n^c, p et p^c, ce qui est exclu (schéma *fig.* 1).

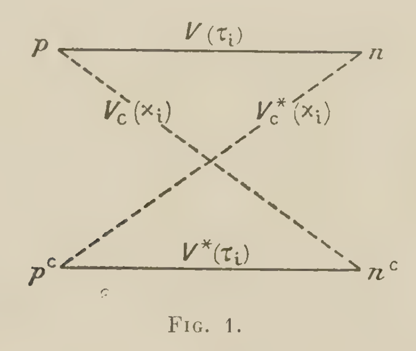


Fig. 1.

Cependant, on peut associer $\varkappa_3$, diagonale, aux τ_i, ce qui donne : $U = e^{i\varkappa_3\theta} V$ dans la représentant (17)

De même, on peut associer τ_3 aux $\varkappa_i$, d'où :

$$U_c = e^{i\tau_3\theta_c} V_c.$$

B. **Cas d'une paire de bosons isobares.** — La paire K^+, K^0 en est le seul exemple connu.

Dans l'enceinte E considérée en A, on ne distingue pas en quoi diffèrent ces deux états orthonormaux et on peut encore les remplacer par K'^+, K'^0 qui en sont déduits par une transformation unitaire U_2 : les relations d'anticommutation (8) sont seulement remplacées par des relations de commutation.

Posant : $\xi = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$, on retrouve (11), ainsi que (13) pour $\xi^c = \begin{pmatrix} \overline{K^+} \\ \overline{K^0} \end{pmatrix}$.

Ici, la phase θ de U ne peut pas être associée au nombre de mésons K puisqu'ils n'y a pas conservations des Bosons. V unitaire unimodulaire définit toujours le spin isobarique.

A côté de transformations (11) et (13), on peut ici effectuer des transformations :

$$\begin{cases} K'^+ = AK^+ + B\overline{K^+} \\ \overline{K'^+} = B^* K^+ + A^* \overline{K^+} \end{cases} \quad (19)$$

et :

$$\begin{cases} K'^0 = CK^0 + D\overline{K^0} \\ \overline{K'^0} = D^* K^0 + C^* \overline{K^0} \end{cases} \quad (20)$$

puisque, si K^+ correspond au champ $\varphi(w)$, $\overline{K^+}$ correspond à $\varphi^*(-w)$, les relations de commutation s'écrivant :

$$[K^+, K^+] = [\overline{K^+}, \overline{K^+}] = 0, \quad [\overline{K^+}, K^+] = F_0. \quad (21)$$

Il semble donc que les transformations V et V_c soient simultanément possibles. En fait, par des produits VV_c, on obtiendrait des transformations *unitaires unimodulaires* analogues à (19-20). Mais celles-ci ont une structure différente.

En effet, pour que K'^+, $\overline{K'^+}$ satisfassent aux mêmes relations que K^+, $\overline{K^+}$, A, B doivent satisfaire à :

$$\underline{|A|^2 - |B|^2 = 1} \quad (22)$$

puisque :

$$[\overline{K'^+}, K'^+] = |A|^2[\overline{K^+}, K^+] + |B|^2[K^+, \overline{K^+}]$$
$$= (|A|^2 - |B|^2)[\overline{K^+}, K^+]$$

tandis que : $[\overline{K'^+}, \overline{K'^+}] = [K'^+, K'^+] = 0$ résultent de (21) quels que soient A et B.

De même avec (20) on obtient [1] :

$$|C|^2 - |D|^2 = 1. \quad (23)$$

Les transformations (19) satisfaisant à (22) dépendent en fait de 3 paramètres réels :

$$A = e^{i\theta_1} \operatorname{ch} \frac{\mu}{2}, \qquad B = e^{i\theta_2} \operatorname{sh} \frac{\mu}{2}. \quad (22b)$$

De même (23) donne :

$$C = e^{i\theta_3} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2}, \qquad D = e^{i\theta_4} \operatorname{sh} \frac{\eta}{2}. \quad (23b)$$

Ainsi, si l'on retient les transformations V entre K^+, K^0 (et V^* entre $\overline{K^+}$, $\overline{K^0}$), il faut leur associer non pas V_c, (V_c^*) mais des transformations W

[1] On admet évidemment que K^0 et $\overline{K^0}$ sont discernables, c'est-à-dire que le champ K^0 n'est pas « absolument neutre » (hermitique).

définies par (19-20) avec les relations (22-23), suivant le schéma figure 2.

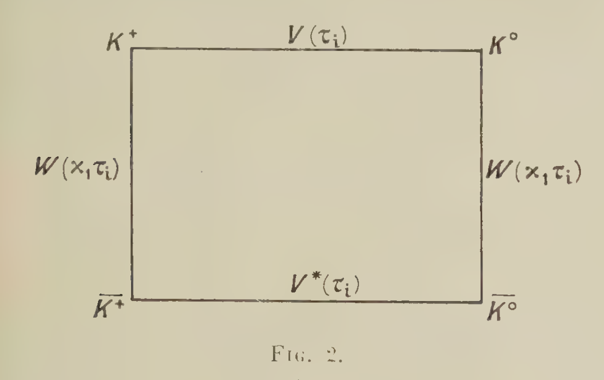


Fig. 2.

Toutes les transformations (19) et (20) peuvent être obtenues en associant une transformation (20) arbitraire W_0 à un ensemble (19-20) où les constantes C, D sont liées à A, B, soit W_1. Prenons par exemple :

$$A = C = \mathrm{ch}\,(\mu/2)\ ; \qquad B = D = i\,\mathrm{sh}\,(\mu/2)$$

c'est-à-dire :

$$\eta = \mu, \qquad \theta_1 = \theta_3 = 0\ ; \qquad \theta_2 = \theta_4 = \pi/2$$

et comme au § A, disposons les 4 états du méson K dans la matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \\ \overline{K^0} \\ -\overline{K^+} \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors par (19-20) :

$$\begin{pmatrix} K'^+ \\ K'^0 \\ \overline{K'^0} \\ -\overline{K'^+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(\mu/2) & . & . & -i\,\mathrm{sh}\,(\mu/2) \\ . & \mathrm{ch}\,(\mu/2) & i\,\mathrm{sh}\,(\mu/2) & . \\ . & -i\,\mathrm{sh}\,(\mu/2) & \mathrm{ch}\,(\mu/2) & . \\ i\,\mathrm{sh}\,(\mu/2) & . & . & \mathrm{ch}\,(\mu/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \\ \overline{K^0} \\ -\overline{K^+} \end{pmatrix}$$

cette matrice étant :

$$\mathrm{ch}\,\frac{\mu}{2}\,.1 + \mathrm{sh}\,\frac{\mu}{2}\,.\varkappa_1\,\tau_2 = e^{\varkappa_1\tau_2\mu/2}$$

où les $\tau_i\,\varkappa_i$ à 4 lignes, 4 colonnes sont définies comme au § A. Elle est analogue à celle qui effectue une transformation de Lorentz le long de Oy sur un *spineur de Dirac* :

$$e^{\gamma_5\sigma_2\mu/2} = e^{\rho_1\sigma_2\mu/2}$$

en prenant

$$\gamma_5 = \rho_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

D'autre part, les transformation V, V^* s'obtiennent à l'aide des τ_i à 4 lignes, 4 colonnes comme au § A, une transformation V (et V^*) infinitésimale pouvant s'écrire :

$$V = 1 + \frac{i}{2}\,(\delta\tau_1 + \beta\tau_2 + \alpha\tau_3)$$

homomorphe d'une rotation spatiale sur un spineur de Dirac.

En mettant de côté les transformations W_0 portant sur K^0, $\overline{K^0}$ seuls, on doit donc pouvoir écrire l'ensemble des transformations VW_1 comme homomorphes des transformations de Lorentz homogènes sur un spineur de Dirac :

$$VW_1 = 1 + \frac{i}{2}\,(\delta\tau_1 + \beta\tau_2 + \alpha\tau_3) + \frac{1}{2}\,(\lambda\varkappa_1\,\tau_1 + \mu\varkappa_2\,\tau_2 + \nu\varkappa_1\,\tau_3).$$

En posant $\delta' = \delta/2$ etc..., ceci correspond aux transformations infinitésimales à 6 *paramètres réels* :

$$\left\{\begin{aligned} K'^+ &= (1 + i\alpha')\,K^+ + (\beta' + i\delta')\,K^0 \\ &\quad - \nu'\,\overline{K^0} + (\lambda' - i\mu')\,(-\overline{K^+}) \\ K'^0 &= (-\beta' + i\delta')\,K^+ + (1 - i\alpha')\,K^0 \\ &\quad + (\lambda' + i\mu')\,\overline{K^0} - \nu'(-\overline{K^+}) \\ \overline{K'^0} &= \nu'\,K^+ + (\lambda' - i\mu')\,K^0 \\ &\quad + (1 + i\alpha')\,\overline{K^0} + (\beta' + i\delta')\,(-\overline{K^+}) \\ -\overline{K'^+} &= (\lambda' + i\mu')\,K^+ - \nu'\,K^0 \\ &\quad + (-\beta' + i\delta')\,\overline{K^0} + (1 - i\alpha')\,(-\overline{K^+}) \end{aligned}\right. \tag{24}$$

qu'il faut comparer à :

$$\left\{\begin{aligned} K'^+ &= a_1\,K^+ + a_2\,K^0 + a_3\,\overline{K^+} + a_4\,\overline{K^0} \\ K'^0 &= b_1\,K^+ + b_2\,K^0 + b_3\,\overline{K^+} + b_4\,\overline{K^0} \\ \overline{K'^+} &= a_3^*\ K^+ + a_4^*\ K^0 + a_1^*\ \overline{K^+} + a_2^*\ \overline{K^0} \\ \overline{K'^0} &= b_3^*\ K^+ + b_4^*\ K^0 + b_1^*\ \overline{K^+} + b_2^*\ \overline{K^0} \end{aligned}\right. \tag{25}$$

où les 8 constantes complexes a_i, b_i doivent vérifier les 6 conditions :

(26a)

$|a_1|^2 + |a_2|^2 = |a_3|^2 + |a_4|^2 + 1$ pour que $[\overline{K'^+},\ K'^+] = F$

(26b)

$|b_1|^2 + |b_2|^2 = |b_3|^2 + |b_4|^2 + 1$ pour que $[\overline{K'^0},\ \ K'^0] = F$

$a_1^*\ b_1 + c_2^*\ b_2 = a_3^*\ b_3 + a_4^*\ b_4$ (et C. C.) pour que :

$$[\overline{K'^+}\ \ K'^0] = [K'^+, \overline{K'^0}] = 0 \tag{27}$$

$a_1\,b_3 + a_2\,b_4 = a_3\,b_1 + a_4\,b_2$ (et C. C.) pour que :

$$[K'^+,\ K'^0] = [\overline{K'^+}, \overline{K'^0}] = 0. \tag{28}$$

Pour une transformation infiniment voisine de l'identité, les relations (26) impliquent que $a_1 - 1$, $b_2 - 1$ soient imaginaires purs :

$$a_1 = 1 + i\,\alpha'\ ; \qquad b_2 = 1 - i\,\varepsilon'.$$

Elles sont alors vérifiées au 2e ordre près. (27) donne, au 1er ordre : $b_1 = - a_2^*$ vérifiée dans (24) ; et (28) :

$$b_3 = a_4 \equiv \nu' - i\,\theta'.$$

Les transformations (24) où $\varepsilon' = \alpha'$, $\theta' = 0$ et $b_4 = - a_3^*$ forment donc un groupe plus restreint que (25-28), ce qui est évident puisque les premières dépendent de 6 paramètres réels, et les secondes de $16 - 6 = 10$ *paramètres réels.*

Cependant, si nous effectuons après (24), une transformation W_0 infinitésimale arbitraire (qui dépend de 3 *paramètres réels*) :

$$\left\{\begin{array}{l} K''^0 = (1 + iu)\, K'^0 + v\, \overline{K'^0} \\ \overline{K''^0} = v^*\, K'^0 + (1 - iu)\, \overline{K'^0} \end{array}\right.$$

nous remplaçons K'^0, $\overline{K'^0}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} K''^0 = (- \beta' + i\,\delta')\, K^+ + (1 - i\,\alpha' + iu)\, K^0 \\ \qquad\qquad + (\lambda' + i\,\mu' + v)\, \overline{K^0} + \nu'\, \overline{K^+} \\ \overline{K''^0} = \nu'\, K^+ + (\lambda' - i\,\mu' + v^*)\, K^0 \\ \qquad\qquad + (1 + i\,\alpha' - iu)\, \overline{K^0} - (\beta' + i\,\delta')\, \overline{K^+} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que, dans $W_0\, VW_1$:

$$\varepsilon' = \alpha' - u \neq \alpha' \quad \text{et} \quad b_4 = \lambda' + i\,\mu' + v$$

est sans relation avec a_3. Enfin, effectuons après (24) une transformation $e^{i\theta'\varkappa_3}$ infinitésimale, soit $1 + i\theta'\, \varkappa_3$. Nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} K''^+ = (1 + i\,\alpha' + i\,\theta')\, K^+ + (\beta' + i\,\delta' + i\,\theta')\, K^0 \\ \qquad\qquad + (\nu' - i\,\theta')\, \overline{K^0} - (\lambda' - i\,\mu' - i\,\theta')\, \overline{K^+} \\ K''^0 = (- \beta' + i\,\delta' + i\,\theta')\, K^+ + (1 - i\,\alpha' - i\,\theta')\, K^0 \\ \qquad\qquad + (\lambda' + i\,\mu' - i\,\theta')\, \overline{K^0} + (\nu' - i\,\theta')\, \overline{K^+} \end{array}\right.$$

et les complexes conjugués, où $\theta' \neq 0$.

Les transformations (25-28) les plus générales sont donc bien obtenues comme produits des VW_1 *homomorphes des rotations dans un espace à 4 dimensions à métrique de Minkowski* (à 6 paramètres), par $e^{i\theta'\varkappa_3}$ (1 paramètre) et par les W_0 sur K^0, $\overline{K^0}$ seuls (3 paramètres).

$$e^{i\theta'\varkappa_3}\, VW_1 \quad \text{est l'analogue de } e^{i\theta\varkappa_3} V \text{ du § A.}$$

$\varkappa_3$ est l'analogue de γ_4 pour les spineurs de Dirac dans la représentation $\gamma_5 = \rho_1$, $\gamma_4 = \rho_3$. On peut donc dire qu'elle effectue une « symétrie spatiale » dans cet espace des états de Minkowski : comme γ_4, $\varkappa_3$ commute avec les « rotations spatiales », c'est-à-dire avec les τ_i, mais non avec les « rotations » dans un plan défini par un « axe d'espace » et un « axe de temps », c'est-à-dire avec les $\varkappa_1\, \tau_i$.

Les deux doublets $\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \overline{K^0} \\ - \overline{K^+} \end{pmatrix}$ sont les analogues de deux spineurs de Pauli de parités opposées. En revenant à la signification physique de τ_3, $\varkappa_3$ on a le tableau des valeurs propres suivantes :

	τ_3	$\varkappa_3$
p	+ 1	+ 1
n	− 1	+ 1
n^c	+ 1	− 1
p^c	− 1	− 1
K^+	+ 1	+ 1
K^0	− 1	+ 1
$\overline{K^0}$	+ 1	− 1
$\overline{K^+}$	− 1	− 1

Si l'on considère l'ensemble des baryons, on sait que l'ensemble des valeurs propres de $T_3 = \tau_3/2$, T (ici $T = 1/2$), $\varkappa_3$ (particule ou anti-particule) ne suffit pas à les classer.

En se limitant aux doublets d'isobares ($T = 1/2$), il faut une autre « variable dichotomique » pour distinguer le doublet $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ (avec ses antiparticules) et le doublet $\begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}$ (avec ses antiparticules).

Ce nouveau nombre quantique est lié à l'étrangeté S qui indique aussi le décalage des valeurs de la charge pour un même T_3 :

$$Q = T_3 + \varkappa_3 \frac{A}{2} + \frac{S}{2} = \frac{1}{2}(\tau_3 + \varkappa_3 A + S) \text{ avec } A = 1. \tag{29}$$

$S = 0$ pour les nucléons, $S = - 2$ pour les Ξ (et $+ 2$ pour $\overline{\Xi}$).

Pour les mésons K, on ne connaît qu'une paire d'isobares et les valeurs propres de τ_3, $\varkappa_3$ suffiraient à distinguer les différents états de particules et antiparticules. Cependant, comme $A = 0$, la relation (29) conduit à leur attribuer une valeur S ($+ 1$ pour les K, $- 1$ pour les $\overline{K}$). *Celle-ci n'a pas de relation avec* $\varkappa_3$. D'ailleurs, la valeur de $\varkappa_3$ est purement conventionnelle pour les K puisque le nombre de ces particules n'est pas conservé : on pourrait échanger les dénominations K^0 et $\overline{K^0}$ (ce qui n'est pas possible pour n, n^c une fois p, p^c fixés).

Au contraire, les valeurs de S (ou de τ_3) peuvent être déterminées par les règles de sélection dans les processus de création associée hypéron + K.

Ainsi, aux groupes de transformations que nous avons étudiés, se superpose toujours un autre groupe définissant les valeurs de S.

C. **États du neutrino.** — 1° Le champ neutrinique ψ vérifie les équations de Dirac (10) où $m_0 = 0$. On sait que les combinaisons :

$$\psi_g \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}\, \psi, \quad \psi_d \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}\, \psi,$$

orthogonales, vérifient alors chacune (10) *et sont*

indépendantes ; elles ne sont couplées ni par les équations d'évolution (10), ni par les relations d'anticommutation : $\{\psi_g^*, \ \psi_d\} = \{\psi_d^*, \psi_g\} = 0$, comme on le voit en prenant une représentation où γ_5 est diagonale :

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \rho_3 ; \qquad \gamma_4 = \rho_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (30)$$

En effet, dans cette représentation :

$$\psi_g = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \psi_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

(ψ_1, ψ_2 étant des spineurs à 2 composantes) correspondent à des indices différents.

On se trouve apparemment dans un cas analogue à celui du § A pour une paire d'isobares, avec les états :

$$\begin{pmatrix} \psi_g \\ \psi_d \\ \psi_d^c \\ -\psi_g^c \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} \psi_d^c = \left(\dfrac{1-\gamma_5}{2}\psi\right)^c = \dfrac{1+\gamma_5}{2}\psi^c \\ \psi_g^c = \left(\dfrac{1+\gamma_5}{2}\psi\right)^c = \dfrac{1-\gamma_5}{2}\psi^c \end{cases} \qquad (31)$$

Avec la représentation (30), ces 4 états sont représentés par les 4 spineurs de Pauli :

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^c \\ -\psi_1^c \end{pmatrix}.$$

D'après (31) ψ_d^c est, comme ψ_g, un état propre de γ_5 avec la valeur $+1$, ψ_g^c avec la valeur -1, comme ψ_d [2].

2° Comme au § A, il semble que l'on puisse effectuer les transformations (11-13) sur les doublets

$$\begin{pmatrix} \psi_g \\ \psi_d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \psi_g^c \\ \psi_d^c \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire en particulier les transformations V sur

$$\begin{pmatrix} \psi_g \\ \psi_d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \psi_d^c \\ -\psi_g^c \end{pmatrix}.$$

Cependant, les équations d'évolution s'écrivent avec la représentation (30) :

$$(\vec{\sigma}\,\vec{p} + p)\,\psi_1 = 0 \qquad (-\vec{\sigma}\,\vec{p} + p)\,\psi_2 = 0 \qquad (10b)$$

ψ_1 et ψ_2 représentent des états symétriques l'un de l'autre. Dans un système d'axes droit, ψ_1 (ou ψ_g) représente un état gauche d'hélicité -1, ψ_2 (ou ψ_d) un état droit d'hélicité $+1$.

[2] On peut dire aussi que ψ_g, ψ_d^c ont la « chiralité » $+1$, ψ_d, ψ_g^c la chiralité -1.

Une transformation V qui combine ces deux états ne conserve donc pas strictement les équations d'évolution et doit être exclue (tout comme (9) au § A [3]).

On peut aussi, comme au § A, effectuer sur les doublets

$$\begin{pmatrix} \psi_g \\ \psi_d^c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} \psi_g^c \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

les transformations (12-14), en particulier les V_c. Ici ψ_g et ψ_d^c d'une part, ψ_g^c et ψ_d de l'autre obéissent bien aux mêmes équations d'évolution (10 *b*).

Nous avons alors les V_c associées aux $\varkappa_i$ de § A et $e^{i\tau_3\theta_c} = e^{i\gamma_5\theta_c}$, τ_3 correspondant ici à γ_5.

Nous pouvons associer ici V_c aux matrices τ_i en inversant les rôles des τ_i et $\varkappa_i$, c'est-à-dire en écrivant les 4 états du neutrino et de l'anti-neutrino dans l'ordre :

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2^c \\ \psi_2 \\ -\psi_1^c \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Les valeurs propres de τ_3, $\varkappa_3$ sont alors associées aux différents états suivant le tableau :

	τ_3	$\varkappa_3 = \gamma_5$
ψ_g	$+1$	$+1$
ψ_d^c	-1	$+1$
ψ_d	$+1$	-1
ψ_g^c	-1	-1

$\varkappa_3$ correspondant maintenant à γ_5, τ_3 au caractère neutrino, ou anti-neutrino.

Ainsi, le spin isobarique $T = 1/2$ se trouve attribué à la paire

$$\begin{pmatrix} \nu \\ \nu^c \end{pmatrix} \begin{matrix} : \ \nu \text{ correspondant à } \tau_3 = +1. \\ : \ \nu^c \text{ correspondant à } \tau_3 = -1. \end{matrix}$$

Les deux états de la paire diffèrent par des propriétés « intrinsèques », comme deux états isobares, l'un étant un état neutrino, l'autre un état anti-neutrino de même hélicité. L'analogie obtenue pourrait donc avoir une signification physique. C'est ce que Heisenberg et Pauli ont admis dans leur tentative de théorie unitaire, en suivant la remarque de Gürsey.

Remarquons que l'on peut faire porter la transformation :

$$V_c = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

sur les champs :

$$\begin{cases} \psi = \psi_g + \psi_d \\ \psi^c = \psi_g^c + \psi_d^c \end{cases}$$

[3] Ceci n'empêche pas que la différence entre les états isobares puisse éventuellement résulter d'une sorte d' « asymétrie interne » ne correspondant à aucune asymétrie spatiale ordinaire.

dans leur ensemble, en combinant les relations (α), (γ) et (β), (δ) de :

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi'_g = a\,\psi_g + b\,\underline{\psi_g} & (\alpha) \\ \underline{\psi'_g} = -\,b^*\,\psi_g + a^*\,\underline{\psi_g} & (\beta) \\ \psi'_d = a\,\psi_d + b\,\underline{\psi_d} & (\gamma) \\ \underline{\psi'_d} = -\,b^*\,\psi_d + a^*\,\underline{\psi_d} & (\delta) \end{array}\right. \qquad (33)$$

où l'on a posé $\underline{\psi_g} \equiv \psi^c_d$ et $\underline{\psi_d} \equiv -\,\psi^c_g$ pour mettre en évidence les hélicités de chacune des paires :

$$\begin{pmatrix}\psi_g \\ \underline{\psi_g}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}\psi_d \\ \underline{\psi_d}\end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la transformation (9) de Pauli [1] :

$$\psi' = a\,\psi + b\,\gamma_5\,\psi^c, \quad \psi'^c = a^*\,\psi^c - b^*\,\gamma_5\,\psi,$$
$$\text{avec : } |a|^2 + |b|^2$$

qui est compatible avec les équations d'évolution (celles-ci étant *strictement* conservées) dans le cas actuel $m_0 = 0$. On doit y ajouter les transformations à 1 paramètre :

$$\psi' = e^{i\gamma_5\theta_c}\,\psi, \qquad \psi'^c = e^{i\gamma_5\theta_c}\,\psi^c$$

introduisant le déphasage $2\theta_c$ entre ψ_g et ψ_d.

Gursey [2] a précisé l'analogie en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} p = \chi_g + \zeta_d \equiv \dfrac{1+\gamma_5}{2}\,\chi + \dfrac{1-\gamma_5}{2}\,\zeta \\[2ex] n = \chi_g + \zeta_d \equiv \dfrac{1+\gamma_5}{2}\,\chi^c - \dfrac{1-\gamma_5}{2}\,\zeta^c \end{array}\right. \qquad (34)$$

En considérant aussi les conjugués de charge de (31), on en tire :

$$\left\{\begin{array}{l} \chi = \dfrac{1+\gamma_5}{2}\,p + \dfrac{1-\gamma_5}{2}\,n^c \\[2ex] \zeta = \dfrac{1-\gamma_5}{2}\,p - \dfrac{1+\gamma_5}{2}\,n^c. \end{array}\right.$$

Ces champs χ, ζ définis par Gürsey satisfont à des équations couplées, invariantes par (9′) sur χ, ζ ce qui correspond bien à une transformation V pour p, n, d'après (30) et (31). Elles sont aussi invariantes par

$$\chi \to \chi' = e^{i\gamma_5\theta_c}\,\chi \quad \text{et} \quad \zeta \to \zeta' = e^{-i\gamma_5\theta_c}\,\zeta$$

d'où la transformation de jauge en θ_c.

Évidemment (33) implique l'existence dans la nature *des 4 états* ψ_g, ψ^c_d, ψ^c_g, ψ_d *du neutrino*. Dans une théorie *à 2 états* du neutrino, on n'a que 2 états d'hélicités opposées qui ne peuvent être combinés par une transformation V_c : ψ_g et ψ^c_g dans la théorie de Weyl et Lee-Yang, ψ_g et ψ_d dans la théorie de Majorana.

Si le spin isobarique T a un sens, dans ce dernier cas il devrait être pris nul, comme pour Λ^0 (états Λ^0 et $\overline{\Lambda^0}$). Il en serait de même pour tous les leptons autres que le neutrino qui n'ont qu'un état de particule (et l'état antiparticule correspondant).

Avec la première hypothèse, les désintégrations β :

$$n \to p + e^- + \nu^c\,; \qquad p \to n + e^+ + \nu$$
$$T_3 : \; -\frac{1}{2}\,; \; +\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\,; -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}$$

vérifieraient la règle $|\Delta\vec{T}| = 1/2$ des interactions faibles (en admettant que $T = 0$ ait un sens pour l'électron).

Avec la seconde ($T = 0$ pour ν, ν^c) cette règle ne serait pas vérifiée ([4]).

D'autre part, l'incertitude sur l'état (ψ_g ou ψ^c_d) d'un neutrino d'hélicité déterminée ne peut pas être levée aussi facilement que pour l'état de charge du nucléon, par l'application d'un champ électromagnétique. Ici, un processus de désintégration β inverse pourrait seul, en principe, lever cette incertitude, et fait disparaître le neutrino.

Conclusion. — 1° *Dans le cadre de la théorie des champs actuelle*, l'analogie suggérée par Gürsey entre le doublet proton-neutron et le doublet neutrino-antineutrino à quatre états, conduirait à attribuer le spin isobarique $T = 1/2$ à ce dernier. Pour un neutrino à deux états au contraire, comme pour les autres leptons, on serait conduit à prendre $T = 0$, si la notion de spin isobarique a encore un sens.

2° A cause des relations de commutation de champs différentes, la dégénérescence des états isobares en l'absence de champ électromagnétique est d'ordre plus élevé pour les *Bosons* de $T = 1/2$ (mésons K) : elle porte sur les 4 états de particules et antiparticules. Parmi les transformations alors possibles entre ces 4 états, certaines sont d'un type *essentiellement différent* de celles que l'on a pour les états isobares de Fermions, ou les états du neutrino : le groupe de toutes les transformations contient un sous-groupe homomorphe des rotations dans un espace quadri-dimensionnel à métrique de Minkowski.

Nous avons une grande dette de reconnaissance à l'égard du Pr Frédéric Joliot-Curie pour les encouragements qu'il nous a toujours prodigués, pendant plus de dix ans, au cours de nos travaux.

([4]) Quelle que soit l'hypothèse, elle ne serait pas vérifiée pour certaines désintégrations. Ainsi : $\mu^\pm \to e^\pm + \nu + \nu^c$ n'y satisfait pas ; T pour $\nu + \nu^c$ étant de toute façon entier, avec $T_3 = 0$.

Manuscrit reçu le 31 octobre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pauli (W.), *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204.

[2] Gursey (F.), *Nuovo Cim.*, 1958, **7**, 411.

PRÉVISION DE LA SUSCEPTIBILITÉ PARAMAGNÉTIQUE DES CORPS FERROMAGNÉTIQUES. APPLICATION AU COBALT.

Par D. TAUPIN et G. FOURNET,
École Supérieure de Physique et de Chimie de la Ville de Paris.

Résumé. — Au moyen de la théorie des phénomènes coopératifs d'Yvon, nous avons obtenu l'expression de la susceptibilité paramagnétique des corps ferromagnétiques. Dans le cadre du modèle d'Ising, cette expression nous a permis de voir l'influence des termes à deux nœuds, trois nœuds, quatre nœuds, etc... Nous pouvons également prendre en compte, non seulement les énergies d'interaction entre premiers voisins, mais aussi entre deuxièmes, troisièmes voisins, etc... Pour le cobalt nous avons obtenu un très bon accord entre notre courbe théorique et les résultats expérimentaux.

Abstract. — By means of the Yvon cooperative phenomena theory, we have obtained the paramagnetic susceptibility of ferromagnetic materials. If we consider the Ising model we may study the influence of the terms of two sites, three sites, four sites, etc... We may also introduce the interaction energy between first, second, third, etc..., nearest neighbours. Our theoretical curve $\chi(T)$ for cobalt is in quite good agreement with observation.

1. **Introduction.** — De nombreuses études ont été consacrées à la statistique des corps ferromagnétiques ; outre les travaux de Néel [1] considérant les fluctuations du champ moléculaire, la plupart des auteurs utilisent le modèle simplifié d'Ising [2] où les interactions entre atomes sont supposées se limiter aux premiers voisins. On constate alors que les prévisions coïncident assez mal avec l'expérience, surtout au voisinage de la température de Curie. Toutes les méthodes de calcul employées sont soit des méthodes approchées — telles celles de Bethe [3], Kikuchi [4], Zernike [5], Ter Haar [6] — soit exactes, mais donnant toujours le résultat sous forme d'un développement en série (Trefftz [7]). On pourrait imputer les divergences entre les prévisions et l'expérience à l'imprécision des méthodes de calcul, mais il est beaucoup plus probable que les défauts sont dus au modèle utilisé, celui d'Ising.

Nous nous sommes proposés de faire une nouvelle comparaison entre la statistique du modèle d'Ising et l'expérience en nous intéressant à la susceptibilité paramagnétique.

Nous avons utilisé une méthode de calcul exacte qui, comme celle de Trefftz, fournit les résultats sous forme de série rapidement convergente : la théorie d'Yvon [8] et [9]. Yvon avait lui-même amorcé le calcul de la susceptibilité, mais il n'avait explicité que les deux premiers termes du développement. Fournet [10] a repris ces calculs de manière plus approfondie, afin de calculer les températures de Curie dans les divers réseaux simples. Nous avons utilisé ses résultats pour le calcul de la susceptibilité dans les réseaux cubiques centrés (Fer) et à faces centrées (Cobalt et Nickel).

Nous avons ensuite perfectionné la théorie pour tenir compte des interactions avec les voisins d'ordre supérieur à 1, et l'avons appliquée au cas du cobalt.

2. **Rappel de la théorie d'Yvon.** — Rappelons brièvement les hypothèses de la théorie d'Yvon :

— Le réseau est supposé indéformable.

— Le moment magnétique de chaque atome peut prendre 2 positions, l'une parallèle, l'autre antiparallèle au champ magnétique H_1.

— L'énergie mutuelle de deux atomes ne dépend que de l'orientation relative de leurs moments magnétiques et de leur distance.

— On suppose que les seules énergies qui interviennent sont les énergies potentielles dues au champ macroscopique et les énergies d'interaction entre les atomes deux à deux.

— Il est fait usage de la statistique classique.

Dans sa théorie générale sur la thermodynamique ordre-désordre des cristaux constitués de deux sortes d'atomes A et B, Yvon obtient une équation de l'ordre à grande distance sous la forme

$$f(n_i, T, W_{ij}) = C^{te} - U_i/kT \tag{1}$$

dans laquelle

$$n_i = \text{probabilité d'avoir en i un atome de type A,} \tag{2}$$

$$W_{ij} = W_{AA,ij} + W_{BB,ij} - 2W_{AB,ij} \tag{3}$$

où $W_{AA,ij}$ est l'énergie mutuelle d'interaction de deux atomes de type A situés respectivement aux nœuds i et j,

$$U_i = U_{A,i} - U_{B,i} \tag{4}$$

où $U_{A,i}$ est l'énergie potentielle d'un atome A situé en i.

Yvon décompose le premier membre de (1) en

termes de complexité croissante classés d'après le nombre de nœuds *distincts* qu'ils font intervenir

$$f(n_i, T, W_{ij}) = \log A_{1,i} + \sum_j \log A_{2,ij} + \sum_{j,k} \log A_{3,ijk} + \ldots \quad (5)$$

Le fait remarquable est que les $A_{n,ijk\ldots}$ sont des fonctions de n_i, W_{ij} et T indépendantes du réseau, lequel n'intervient que dans leur existence et leur dénombrement. Ils sont calculables *a priori* dans un réseau fictif à nombre fini de nœuds.

3. **Application aux corps ferromagnétiques. Calcul de la susceptibilité χ.** — L'équation (1) devient, à condition de considérer qu'un atome A est, par exemple, un atome de moment $+\mu$ et B, un atome de moment $-\mu$:

$$f(n_i, T, W_{ij}) = C^{te} + 2\mu H_i/kT \quad (6)$$

où H_i est le champ agissant sur l'atome situé au nœud i.

Nous savons qu'au-dessus de la température de Curie et en l'absence de champ magnétique l'ordre à grande distance a complètement disparu et par conséquent

$$n_i \equiv 1/2$$

ce qui se traduit (cf. (6))

$$f(1/2, T, W_{ij}) \equiv C^{te}\,; \qquad T > T_c. \quad (7)$$

Pour les mêmes conditions de température l'action du champ magnétique ne fait que varier très faiblement la probabilité n_i et nous pouvons donc écrire

$$f\left(\frac{1}{2}, T, W_{ij}\right) + \frac{\partial f}{\partial n_i}\left(\frac{1}{2}, T, W_{ij}\right)\cdot\left(n_i - \frac{1}{2}\right) + \ldots = C^{te} + \frac{2\mu H}{kT} \quad (8)$$

en ne conservant que les termes du premier ordre dans le développement de la fonction f. La comparaison de (7) et (8) fournit

$$\frac{\partial f}{\partial n_i}\left(\frac{1}{2}, T, W_{ij}\right)\cdot\left(n_i - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\mu H}{kT}. \quad (9)$$

Il est commode de poser

$$n_i = \frac{1}{2}(1 + s) \quad (10)$$

et d'utiliser les quantités

$$a_{n,ij\ldots} = \frac{1}{A_{n,ij\ldots}} \frac{\partial A_{n,ij\ldots}(s = 0)}{\partial s} \quad (11)$$

déjà introduites dans un précédent article [10] pour obtenir l'expression de la susceptibilité

$$\chi = \frac{2\mu^2 N}{kT(a_{1,i} + \sum a_{2,ij} + \sum a_{3,ijk} + \ldots)} \quad (12)$$

où N est le nombre de nœuds par cm³, gramme, ou atome-gramme, selon qu'on considère la susceptibilité par cm³, spécifique ou atomique.

4. **Développement de l'expression de χ valable dans le cadre du modèle d'Ising.** — Nous supposerons que les interactions se limitent aux premiers voisins :

$$\begin{array}{ll} W_{ij} = W_1 & \text{pour des premiers voisins} \\ W_{ij} = 0 & \text{pour les autres.} \end{array} \quad (13)$$

Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$x = e^{W_1/2kT}. \quad (14)$$

Fournet a calculé et dénombré les termes de la parenthèse de l'équation (12) et nous nous bornerons à rappeler ses résultats :

Réseau cubique centré :

$$a_1 + 8\,a_2 + 48\,a_{4,1} + 24\,a_{5,4} + 36\,a_{5,5} + \ldots \quad (15)$$

(La figure 1 indique les interactions représentées par ces termes.)

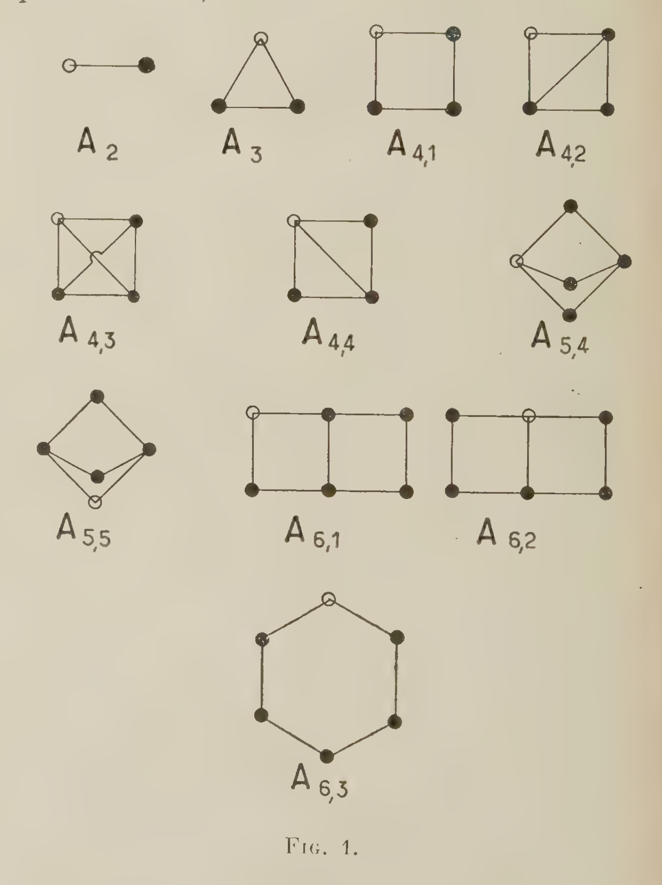


Fig. 1.

Réseau cubique a faces centrées :

$$a_1 + 12\,a_2 + 24\,a_3 + 180\,\bar{a}_{4,1} + 120\,\bar{a}_{4,2} + 120\,\bar{a}_{4,4} + 24\,\bar{a}_{4,3}. \quad (16)$$

Au lieu de considérer, comme Fournet le faisait, un seul terme à 4 nœuds, pour chaque figure de 4 atomes, nous avons préféré scinder ce terme en plusieurs de complexité croissante. Par exemple nous posons

$$a_{4,2} = \bar{a}_{4,2} \qquad (17a)$$

$$a_{4,2} = \bar{a}_{4,1} + \bar{a}_{4,2}. \qquad (17b)$$

Ces nouveaux paramètres sont intéressants pour deux raisons :

Le terme $a_{4,2}$ par exemple diffère peu du terme $\bar{a}_{4,1}$ et dans une première approximation leur différence $\bar{a}_{4,2}$ pourra être négligée ; nous aurons donc moins de termes à calculer.

Les formes mathématiques de nos $\bar{a}_p$ sont plus simples que celles relatives aux a_p ; nous avons en effet défini les $\bar{a}_p$ de telle façon qu'ils n'existent que si toutes les liaisons elles-mêmes existent et par suite l'annulation de chacune d'elles isolément correspond au moins à une racine simple $x = 1$. Les $\bar{a}_p$ contiennent donc toujours un facteur $(x - 1)^n$, n étant au moins égal au nombre de liaisons que le $\bar{a}_p$ fait intervenir.

Nous avons posé de même :

$$\bar{a}_{4,4} = a_{4,4} - \bar{a}_{4,1} \qquad (17c)$$

$$\bar{a}_{4,3} = a_{4,3} - 3\,\bar{a}_{4,4} - 3\,\bar{a}_{4,2} - 3\,\bar{a}_{4,1} \qquad (17d)$$

$$\bar{a}_{6,3} = a_{6,3} \qquad (17e)$$

$$\bar{a}_{6,1} = a_{6,1} - \bar{a}_{6,3} \qquad (17f)$$

$$\bar{a}_{6,2} = a_{6,2} - \bar{a}_{6,3}. \qquad (17g)$$

Nous donnons ci-dessous les expressions des a déjà calculées par Fournet [9] ainsi que les nouvelles pour les $\bar{a}$:

$$a_1 = 2 \qquad (18)$$

$$a_2 = x - 1 \qquad (18a)$$

$$a_3 = -\frac{2(x-1)^3}{x^2+3} \qquad (18b)$$

$$\bar{a}_{4,1} = a_{4,1} = -\frac{2(x-1)^3}{x^2+3} \qquad (18c)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{4,2} &= -\frac{(x-1)^6}{2(x^2+3)(x^2+1)} \\ a_{4,2} &= \frac{(x-1)^4(x+1)}{(x^2+1)(x^2+3)} \end{aligned}\right\} \qquad (18d)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{4,4} &= \frac{(x-1)^5(-x^3+3x^2+x+5)}{2(x^2+1)^2(x^2+3)} \\ a_{4,4} &= \frac{(x-1)^4(2x^3+x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2(x^2+3)} \end{aligned}\right\} \qquad (18e)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{4,3} &= \frac{3(x-1)^6(x^3-x^2-2)}{2(x^2+3)(x^2+1)^2} \\ a_{4,3} &= \frac{3(x-1)^4(3x-1)}{2(x^2-x+1)(x^2+3)} \end{aligned}\right\} \qquad (18f)$$

$$\bar{a}_{5,4} = a_{5,4} = -\frac{(2-1)^6}{(x^2+1)^3}$$

Nous corrigerons ici une expression donnée dans l'article déjà cité [10]

$$\bar{a}_{6,3} = a_{6,3} = \frac{(x-1)^6}{(3x^2+1)(x^2+3)} \qquad (18h)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{6,1} &= \frac{-(x-1)^8}{2(x^2+1)(x^2+3)(3x^2+1)} \\ a_{6,1} &= \frac{(x-1)^6(x+1)^2}{2(x^2+1)(x^2+3)(3x^2+1)} \end{aligned}\right\} \qquad (18j)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_{6,2} &= \frac{(x-1)^6(x^4+x^3+5x^2-x+2)}{(x^2+1)(x^2+3)(3x^2+1)^2} \\ a_{6,2} &= \frac{(x-1)^6(x^5+x^4+6x^3+x-1)}{(x^2+1)(x^2+3)(3x^2+1)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (18k)$$

Nous avons calculé numériquement ces diverses fonctions en fonction d'une variable réduite m, proportionnelle à la température ; nous avons posé :

$$m = -2kT/W_1 \qquad (19)$$

$$x = e^{-1/m}. \qquad (20)$$

Pour les corps ferromagnétiques W_1 est négatif et la variable m est donc positive.

Pour fixer les idées sur les ordres de grandeurs, nous préciserons que, selon les approximations cf. [10]), pour $T = T_c$, température de Curie,

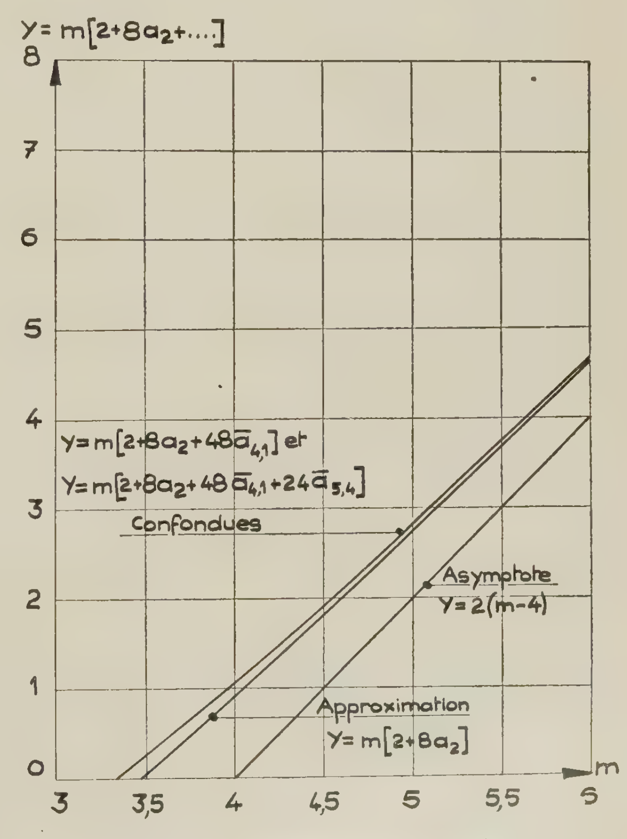


FIG. 2. — Réseau cubique centré.

m_c est voisin de 3,5 pour le réseau cubique centré et de 5,25 pour le réseau cubique à faces centrées.

Il est commode d'étudier, non la susceptibilité χ, mais son inverse

$$1/\chi = - W_1 m(a_1 + \Sigma a_2 + \Sigma a_3 + \ldots)/4\mu^2 N; \quad (21)$$

$1/\chi$ est proportionnel à une fonction réduite Y, laquelle ne dépend plus que du réseau et peut être calculée numériquement *a priori* :

$$Y = m(a_1 + \Sigma a_2 + \Sigma a_3 + \ldots). \quad (22)$$

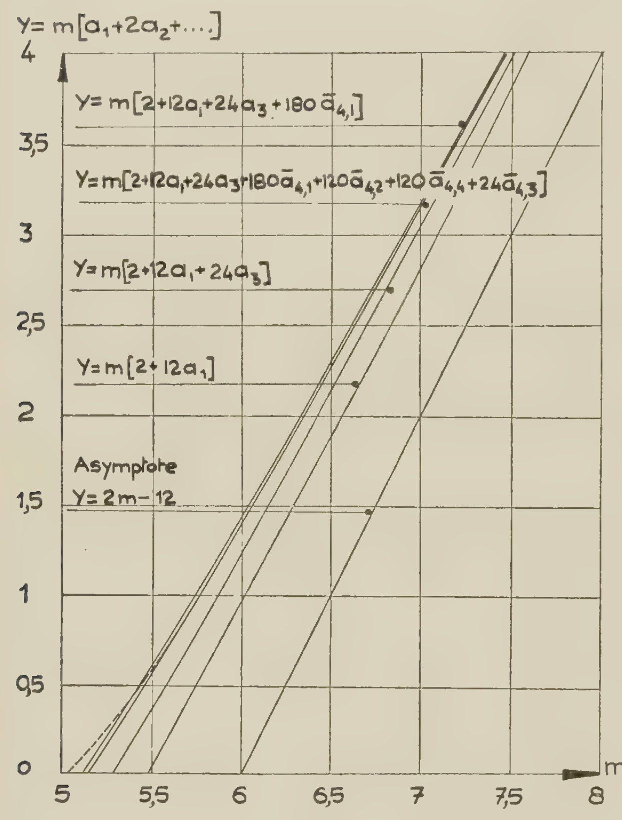


Fig. 3. — Réseau cubique à faces centrées.

Nous avons indiqué (*fig.* 2 et 3) les courbes pour les diverses approximations suivantes :

Réseau cubique centré :

approximation à 2 termes (série limitée aux termes à 2 nœuds),

approximation à 3 termes (série limitée aux termes à 4 nœuds),

approximation à 4 termes (série limitée aux termes à 5 nœuds).

Réseau cubique a faces centrées :

approximation à 2 termes (série limitée aux termes à 2 nœuds),

approximation à 3 termes (série limitée aux termes à 3 nœuds),

approximation à 4 termes (série limitée aux termes à 4 nœuds), les $\bar{a}_{4,2}$ $\bar{a}_{4,3}$, $\bar{a}_{4,4}$ étant négligés),

approximation à 7 termes (série limitée aux termes à 4 nœuds, les $\bar{a}_{42}$, $\bar{a}_{4,3}$, $\bar{a}_{4,4}$ n'étant plus négligés).

5. **Examen des courbes.** — Il apparaît que le fait de négliger les $\bar{a}_{4,2}$, $a_{4,3}$ et $\bar{a}_{4,4}$ a peu d'importance, d'ailleurs, parmi eux, seul $\bar{a}_{4,4}$ a une valeur notable.

On peut constater que la convergence est beaucoup plus rapide pour le réseau cubique centré.

Un autre fait remarquable est la faible courbure des courbes $Y(m)$; en particulier, et contrairement à l'expérience [11], on ne constate pas d'accroissement notable de cette courbure au voisinage du point de Curie. (La courbe en pointillé sur la figure 3 représente les résultats expérimentaux relatifs au cobalt.)

Enfin, la position de l'asymptote, très écartée de la partie accessible à l'expérience, semble rendre illusoire toute détermination expérimentale [11] des températures paramagnétiques de Curie. Pour améliorer la coïncidence entre les courbes expérimentales et théoriques, on pourrait évidemment pousser plus loin les développements en série, mais il est bien clair que cela ne changera pas l'aspect général des courbes, et en particulier la courbure au voisinage du point de Curie. Il faut donc perfectionner le modèle d'Ising. Nous avons donc fait des essais en considérant les interactions non seulement entre premiers voisins mais aussi entre voisins d'ordre supérieur.

6. **Calcul de la susceptibilité du cobalt, en tenant compte des interactions avec les voisins d'ordre supérieur à 1.** — Lorsque nous supposons que les interactions ne se limitent plus aux premiers voisins, d'énergie mutuelle W_1, mais ont lieu également entre voisins plus éloignés, d'énergies mutuelles W_2, W_3 etc..., l'équation (12) devient :

$$\chi = 2\mu^2 N/kT[a_1 + p_1 a_2(W_1) + p_2 a_2(W_2) + p_3 a_1(W_3) + \ldots + r_{111} a_3(W_1, W_1, W_1) + r_{112} a_3(W_1, W_1, W_2) + r_{122} a_3(W_1 W_2 W_3) + \ldots]. \quad (23)$$

Les p, r ... sont des coefficients entiers qui dépendent du réseau considéré.

Étant donné que les interactions entre voisins d'ordre supérieur à 1 sont faibles, nous nous bornerons à les faire intervenir dans les termes en $a_2(W_2)$, $a_2(W_3)$ ... et nous continuerons à négliger les $a_3(W_1 W_1 W_2)$, $a_3(W_1, W_2, W_2)$ .... Les calculs précédents nous ont également montré que les $\bar{a}_{4,2}$, $\bar{a}_{4,3}$, $a_{4,4}$ pouvaient raisonnablement

être négligés ; notre équation (23) devient donc :

$$\chi = 2\mu^2 N/kT[a_1 + 12a_2(W_1) + 24a_3(W_1) + 180a_{4,1}(W_1) + 6\, a_2(W_2) + 8\, a_2(W_3) + \ldots p_n\, a_2(W_n) + \ldots]. \quad (24)$$

Nous ferons encore une approximation : D'après (14) et (18*a*) :

$$a_2(W_n) = e^{W_n/2kT} - 1. \quad (25)$$

Nous admettrons, et nous vérifierons *a posteriori* que pour $n \geqslant 2$, W_n/kT est petit, et que par suite

$$a_2(W_n) = \frac{W_n}{2kT}. \quad (26)$$

Il vient alors

$$\frac{1}{\chi} = \left\{ kT[a_1 + 12a_2(W_1) + 24\, a_3(W_1) + 180\, a_{4,1}(W_1)] + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} p_n\, W_n \right\} \frac{1}{2N\mu^2}. \quad (27)$$

Nous avons déterminé les constantes μ, W_1 et $\sum_{n=2}^{\infty} p_n\, W_n$ de façon à ce que la courbe théorique (*fig.* 4) coïncide au mieux avec la courbe expérimentale pour Co [11].

Nous avons trouvé : (il s'agit de susceptibilité spécifique)

$$1/\chi = 28\,850 + 40\,T[2 + 12\, a_2(W_1) + \ldots] \text{ cgs.u. e. m.} \quad (28)$$

Soit

$$\mu = 1{,}40 \text{ magnéton de Bohr} \quad (29)$$

$$\frac{1}{2} W_1 = -1{,}068.10^{-13} \text{ erg} = -0{,}0667 \text{ eV} \quad (30)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} p_n\, W_n = -0{,}995\ 10^{-13} \text{ erg} = +0{,}0624 \text{ eV}. \quad (31)$$

Rappelons que, pour deux nœuds en positions de n^e voisins :

$$W_n = W_{AA,ij} + W_{BB,ij} - 2\, W_{AB,ij}. \quad (32)$$

Remarquons que p_n est au moins égal à $p_2 = 6$ ce qui fait que les $W_n/2$ (tous positifs) sont inférieurs à 0,01 eV. Par suite $W_n/2kT$ est de l'ordre de 0,08 et notre approximation (26) était justifiée.

L'examen des courbes (*fig.* 4) montre que, dans la limite des erreurs expérimentales, la fonction (28)

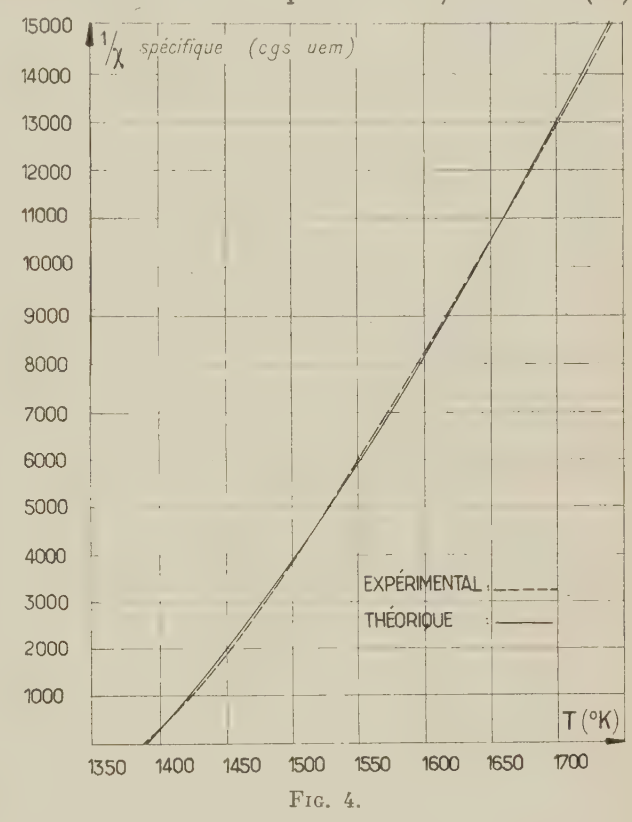


Fig. 4.

représente de manière très satisfaisante les variations de la susceptibilité en fonction de la température.

7. **Conclusion.** — La présente théorie ne peut avoir la prétention d'être une théorie exacte, puisqu'elle fait intervenir séparément le cortège électronique de chaque atome ; une théorie exacte devrait être au moins en partie collective et déduite de la théorie des bandes. Nous croyons cependant que notre travail permet d'obtenir une bonne approximation des faits expérimentaux.

Nous sommes heureux de remercier M. Herpin pour nous avoir donné l'idée initiale d'effectuer ce travail.

Manuscrit reçu le 12 décembre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Néel (L.), *Ann. Physique*, 1932, **17**, 5.
[2] Ising (E.), *Z. Physik*, 1925, **31**, 253.
[3] Bethe, *Proc. Roy. Soc.*, London (A), 1935, **150**, 552.
[4] Kurata, Kikuchi et Watari, *J. Chem. Physics*, 1952, **21**, 434
[5] Zernike, *Physica*, 1940, **7**, 565.
[6] Ter Haar, *Physica*, 1956, **22**, 1.
[7] Trefftz, *Z. Physik*, 1950, **127**, 371.
[8] Yvon (J.), *Cahiers de Physique*, 1945, **28**, 1.
[9] Yvon (J.), *Cahiers de Physique*, 1948, **31-32**, 12.
[10] Fournet (G.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 663.
[11] Fallot, *J. Physique Rad.*, 1944, **5**, 153.

COUCHES NUCLÉAIRES ET ÉNERGIES DE DÉSINTÉGRATION DES ÉMETTEURS β

Par MAURICE-E. NAHMIAS (*),
Laboratoire de Physique et Chimie Nucléaires du Collège de France.

Résumé. — Le premier article publié sur ce sujet dans le *Journal de Physique et le Radium* en avril 1958 a été remis à jour au moyen de la nouvelle Table des Isotopes, parue en avril 1958, dans la *Review of Modern Physics.* Il subsiste toujours des anomalies qui ne sont pas communes aux neutrons et aux protons dans le remplissage des couches nucléaires.

Abstract. — The plots of Q_β versus the number of protons or neutrons published in the first paper on this subject, in *Journal de Physique et le Radium* of April 1958, have been revised with the help of the new Table of Isotopes — *Review of Modern Physics*, April 1958 —. There are still discontinuities in the two kinds of plots which do not coincide.

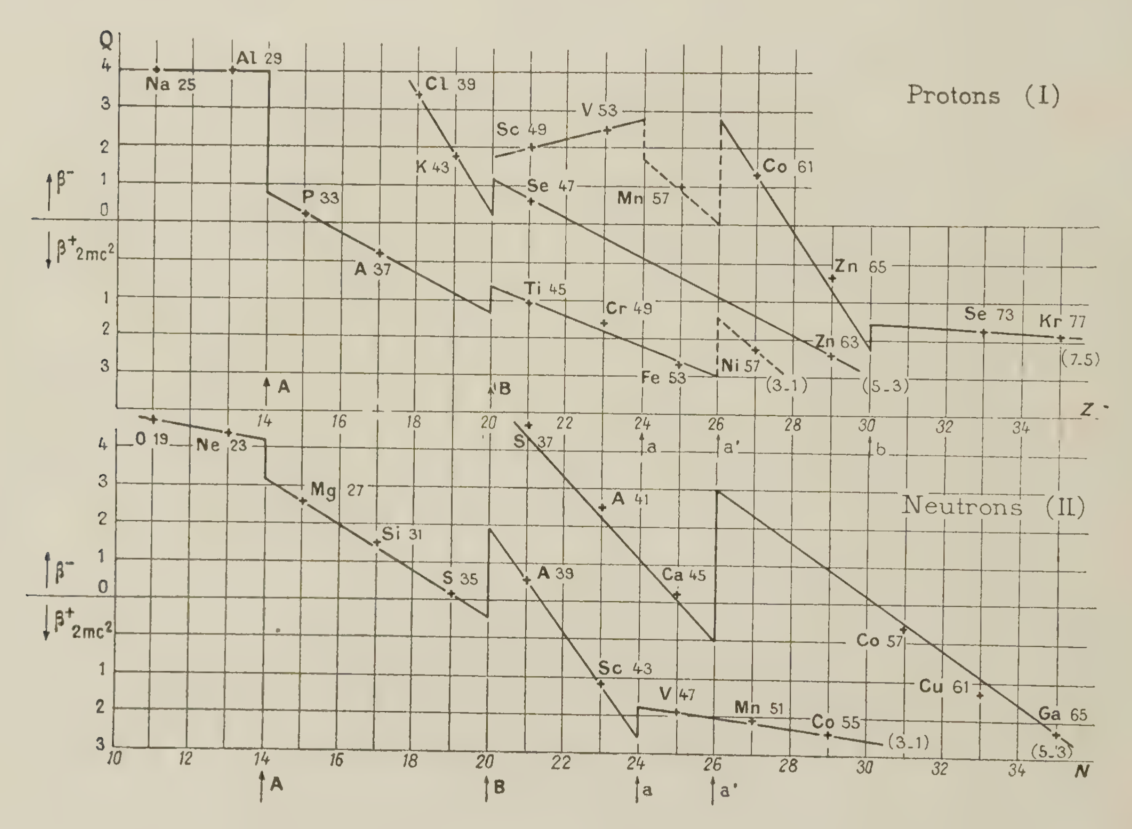


FIG. I A XIII.

En abscisses :

Neutrons : Pour les émetteurs β— le nombre *N* de neutrons du noyau émetteur est donné en abscisses. Pour les émetteurs β+ qui figurent au-dessous des ordonnées zéro, les abscisses donnent le nombre *N* de neutrons du noyau final. Il faut donc retrancher un neutron à l'indication de l'abscisse pour avoir le nombre de neutrons de l'émetteur inscrit sur les courbes.

Protons : Pour les émetteurs β— les abscisses donnent le nombre de protons *Z* du noyau émetteur. Pour les émetteurs β+ on lit sur l'abscisse le *Z* du noyau final. Il faut donc ajouter un proton à l'indication de l'abscisse pour avoir le *Z* du noyau émetteur inscrit sur les courbes.

En ordonnées :

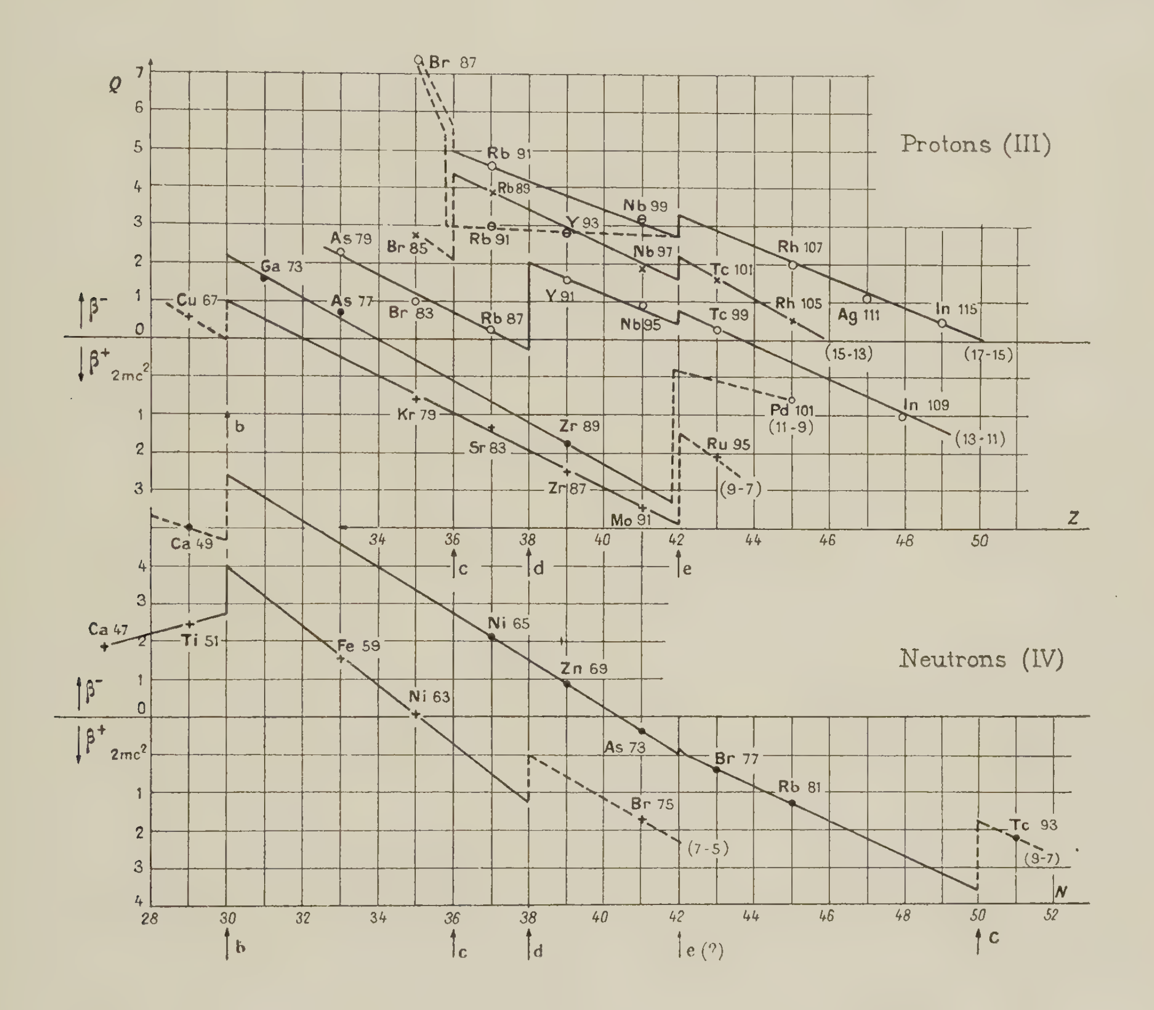
Les énergies totales *E* de désintégration β + γ des radio-éléments β sont représentées en unités MeV, en ordonnées dont la partie supérieure est relative aux radio-éléments β— et la partie inférieure aux β+.

(*) Adresse actuelle : S. H. A. P. E. Technical Center. La Haye. Hollande.

Le premier article sur ce sujet a été envoyé au *Journal de Physique et le Radium* en décembre 1957 et fut publié [1] en avril 1958. Les derniers documents utilisés dataient de fin 1956. Une nouvelle Table des Isotopes est parue [2] dans le numéro d'avril 1958 de la *Review of Modern Physics* et m'a servi à remanier complètement les graphiques du premier article.

Voici ce qu'on peut déduire des 13 figures qui suivent et pour l'établissement desquelles on voudra bien se référer au premier article cité.

Sur 24 anomalies, 10 sont communes aux neutrons et aux protons ; 8 sont uniquement visibles sur les graphiques relatifs aux neutrons, dont 4 pour un nombre de neutrons supérieur à 100 et par conséquent non contrôlables sur des graphiques en



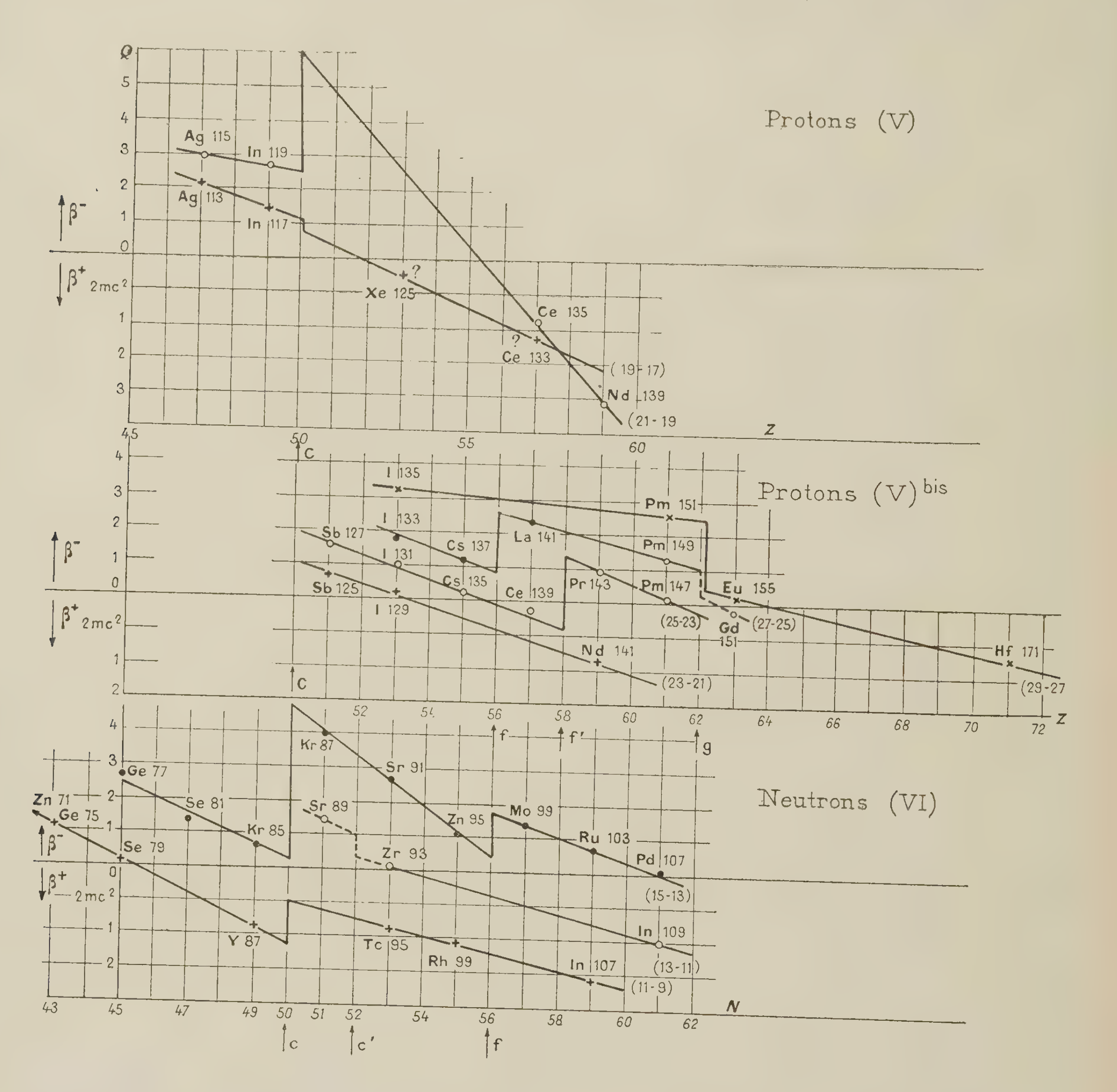
protons. Enfin 7 discontinuités sont propres uniquement aux protons.

Le tableau I résume ces constatations. Lorsque les anomalies sont voisines, comme à 24 et 26, à 50 et 52, ou à 58 $\pm$ 2 nucléons, protons ou neutrons, j'ai désigné la discontinuité par la même lettre : a et a′, C et C′ ou f, f′, f″, la majuscule faisant ressortir un nombre magique du modèle nucléaire à couplage spin-orbite.

Lorsqu'une discontinuité est fondée sur un seul point expérimental la droite a été hachurée et la position de l'anomalie est dans ce cas douteuse, exemple f″ à 60 neutrons sur la droite 19-17 de la figure VIII, bien que cette discontinuité soit confirmée sur la même figure sur la droite 17-15.

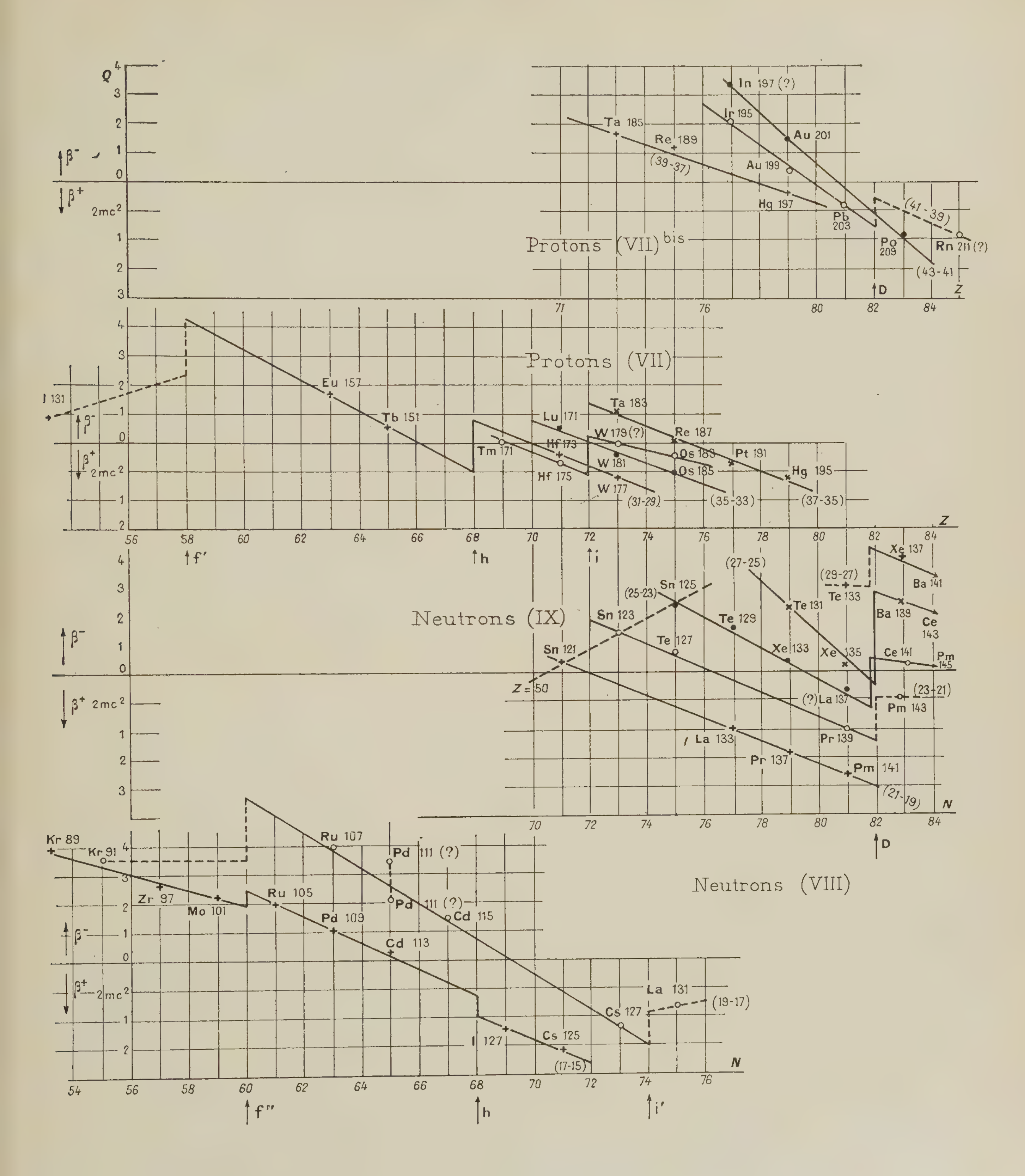
Ces graphiques illustrent, une fois de plus, l'existence de nombres magiques correspondants à des couches saturées avec 14, 20, 50, 82 et 126 particules et des sous-couches à 38, 58 et 68 nucléons Ils montrent aussi qu'il existerait d'autres configurations particulièrement stables à 24, 26, 30 et 56 nucléons (protons ou neutrons), 36, 42, 62, 72, 84 et 88 protons, 52, 60 et 74 ainsi que 120, 122 et 134 neutrons. Certaines de ces configurations sont proches, à une paire de nucléons près, de sous-couches prévues par le modèle de Mayer-Jensen.

L'absence de tout indice d'une couche à 28 nucléons est pourtant assez énigmatique. On observe une pénurie de radioéléments dans cette région — voir droite 5-3, figure II —. Le Ti49 avec 27 neutrons est stable — 5 % —, ainsi que le Cr53 avec 29 neutrons — 9,5 % —. Par contre le $^{28}_{28}$Ni56 doublement magique n'est pas stable pas plus que le $^{28}_{27}$Co55, ni le $^{28}_{25}$Mn53, ni le $^{28}_{21}$Sc49, alors que sont stables le $^{28}_{26}$Fe54(6 %), le $^{28}_{24}$Cr52(84 %), le $^{28}_{23}$V51,(99,8 %) et le $^{28}_{22}$Ti50(5 %). Enfin le $^{28}_{20}$Ca48



n'est pas particulièrement stable puisque sa concentration isotopique n'est que de 0,18 % et qu'il est radioactif β, avec, il est vrai une période de 10^{18} années. Pour le nombre magique 20 on observe au contraire avec les neutrons la grande stabilité de $^{20}_{19}$K39(93 %) et de $^{20}_{17}$Cl37(24,5 %). Dernière remarque, parmi les 10 isotopes connus à 28 protons du nickel, 5 sont stables, dont 4 pair-pair et 5 instables, dont 4 impair-pair.

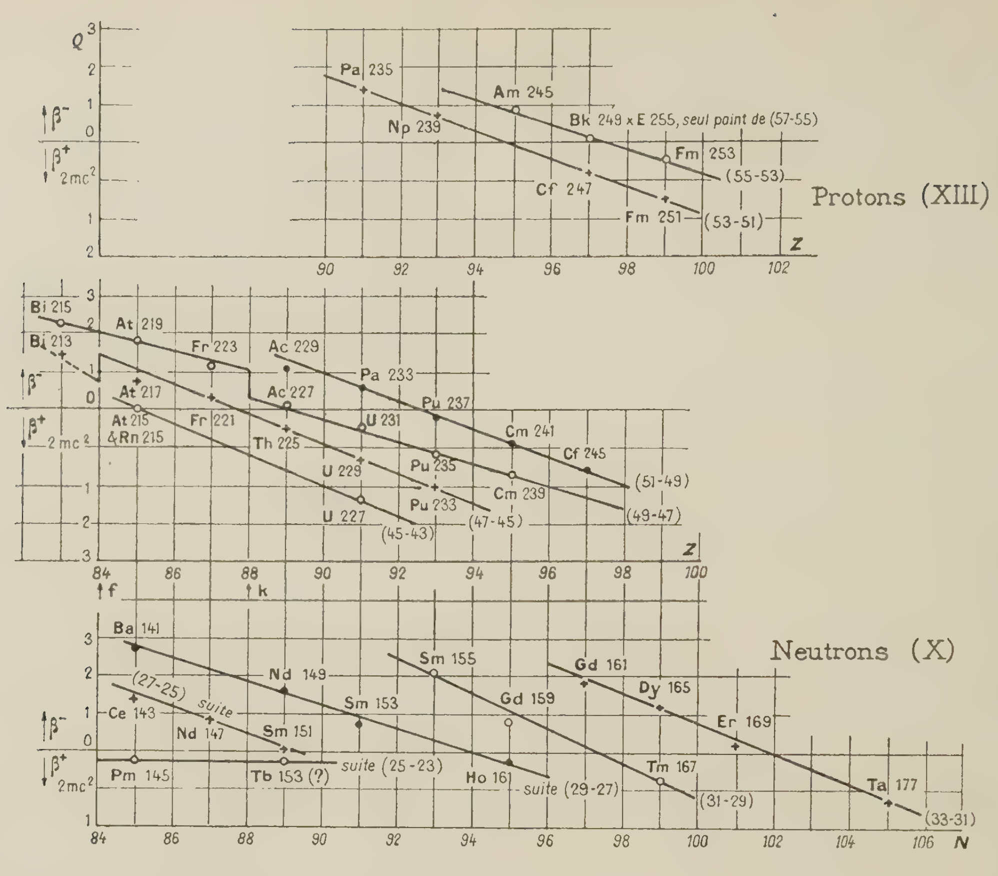
Remarquons en outre que ces graphiques peuvent si bien servir à interpoler ou à extrapoler des valeurs de Q_β que plusieurs points anormaux des figures du premier article [1] se placent à présent beaucoup mieux sur les droites, avec les nouvelles valeurs publiées. C'est ainsi qu'on peut par exemple déduire de la droite 19-17 de la figure VIII que Q_β du Pd111 doit être proche de 2,6 MeV alors que les valeurs expérimentales données jusqu'ici sont : 2,15 par spectromètre [3] et 3,5 par absorption [4].



Un autre exemple est fourni par Au191 dont Q (C. E., β^+) doit être proche de 1,9 MeV, voir droite 35-33 de la figure XI.

Enfin le Q_β de Ir197 se place bien à 3,4 MeV — droite 43-41 de la figure VII *bis* — ce qui confirme la coïncidence β-γ de 1,6 + 1,8 MeV jusqu'ici considérée comme douteuse [5].

Manuscrit reçu le 3 novembre 1958.



Q

Th 235 · U 239 · Pu 243 · Pu 245 · Cm 249 · Cf 253 · (57-55) · E 251 · (55-53)

142 144 146 148 150 152 154 156 N

Neutrons (XII)

Hg 205 · Pb 211 · Po 217 · Rn 221 · Ra 227 · Th 233 · Po 215 · Ra 225 · Th 231 · U 237 · Pb 209 · Pu 241 · Rn 219 · At 213 · Pa 229 · Np 235 · Am 239 · Fr 217 · Ac 223 · Am 237 · E 249 · Pa 227 · Np 233 · (51-49) · Np 231 · (47-45) · (49-47) · (53-51) · Pa 225 · (45-43) · m

124 126 128 130 132 134 136 138 140 142 144 146 148 150 152 N

Neutrons (XI)

Er 171 · Yb 177 · Hf 181 · W 187 · Os 193 · Pt 199 · Pt 197 · Os 191 · Yb 175 · Hg 203 · Ta 179 · Ir 187 · Au 191 · Tl 201 · At 211 · Re 183 · Au 193 · Au 195 · Tl 199 · (43-41) · (37-35) · ? · (39-37) · Bi 205 · Bi 207 · (35-33) · Bi 203 · (41-39) · At 209 · l · l′ · E

102 104 106 108 110 112 114 116 118 120 122 124 126 128 N

TABLEAU I

Couche	Nombre de nucléons : Neutrons ou protons	Index	Anomalie en N et P sur figures :	Anomalie : en N sur figures :	Anomalie : en P sur figures :
1d5/2	14	A	I, II		
2s1/2	20	B	I, II		
	24	a	I, II		
	26	a′	I, II		
28 : 1f7/2					
	30	b	I, III, IV		
34 : 1f5/2					
	36	c			III
2p3/2	38	d	III, IV		
40 : 2p1/2					
	42	e			III, IV ?
1g9/2	50	C	IV, V, VI		
	52	C′		VI	
	56	f	V *bis*, VI		
1g7/2	58	f′			V *bis*, VII
	60	f″		VIII	
	62	g			V *bis*
64 : 2d5/2					
2d3/2	68	h	VII, VIII		
70 : 3s1/2					
	72	i			VII
	74	i′		VIII	
1h11/2	82	D	IX, VII *bis*		
	84	D′ ou j			XIII
	88	k			XIII
92 : 1h9/2					
100 : 2f7/2					
106 : 2f5/2					
110 : 3p3/2					
112 : 3p1/2					
	120	l		XI	
	122	l′		XI	
1i13/2	126	E		XI	
	134	m, à moins que Po217 ait : $Q_\beta = 1{,}8$ MeV		XII	

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nahmias (M.-E.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 485.

[2] Strominger (D.), Hollander (J. M.) et Seaborg (G. T.), *Rev. Mod. Physics*, 1958, **30**, 585.

[3] McGinnis (C. L.), *Phys. Rev.*, 1952, **87**, 202 A.

[4] Born (H. J.) et Seelmann-Eggebert (W.), *Naturwiss.*, 1943, **31**, 420.

[5] Butement (F. D. S.) et Poë (A. J.), *Phil. Mag.*, 1954, **45**, 31.

CORRÉLATION ANGULAIRE BÊTA-GAMMA A L'ÉNERGIE DE RÉSONANCE

Par MAURICE SPIGHEL,
Laboratoire de Synthèse Atomique, C. N. R. S., Ivry-sur-Seine.

Résumé. — Étude des conditions à remplir pour réaliser une expérience de corrélation angulaire bêta-gamma à l'énergie de résonance. Les calculs antérieurs d'autres auteurs sont complétés, en insistant sur le calcul de grandeurs directement accessibles à l'expérience.

Abstract. — The author studies the conditions for the success of an experiment of beta-gamma angular correlation, with resonance fluorescence of the gamma-ray. Additions are made to previous calculations of other authors. Emphasis is put on the calculation of quantities directly accessible to experiment.

Introduction. — L'étude de la corrélation angulaire entre un rayon bêta et un rayon gamma émis en cascade et diffusé par résonance a déjà fait l'objet de divers calculs théoriques [1-2], quand la transition bêta est permise. Une expérience de ce type a l'intérêt de fournir des renseignements sur le type de l'interaction responsable de la désintégration bêta. Elle permet en principe de distinguer entre une interaction de type V et A ou S et T. Les difficultés expérimentales d'une telle mesure sont assez considérables. Cet article analyse les relations entre les grandeurs mesurables et les grandeurs théoriques qui peuvent être atteintes ; il montre que des additions doivent être apportées aux calculs cités [1-2].

Une telle expérience apporte des renseignements théoriques à peu près identiques à ceux fournis par une expérience de corrélation bêta-noyau de recul. La diffusion du noyau de recul par la matière perturbe sa direction et son énergie initiales et fausse les conclusions que l'on peut en tirer [3] ; cette diffusion est sans importance dans une expérience du type que nous considérons si on détecte le gamma à la résonance lorsque la condition $T_\gamma \ll T_c$ est satisfaite, T_γ et T_c étant respectivement le temps de vie du noyau émetteur et le temps de collision de ce noyau dans la matière de la source.

Les contradictions [4] entre les différentes expériences relatives à la corrélation angulaire bêta-noyau de recul et à la non-conservation de la parité sur n^1, ^{6}He, ^{8}Li, ^{19}Ne, ^{23}Ne, ^{35}A, ^{152}Eu, semblent se lever petit à petit [5]. Il est admis à l'heure actuelle que l'interaction bêta est du type V et A. Il serait cependant intéressant d'avoir par la méthode de corrélation angulaire bêta-gamma à la résonance, une indication sur le type d'interaction.

Cet article analyse aussi certaines conditions qui doivent être remplies pour la réussite d'une telle expérience. Le calcul de la fonction de corrélation angulaire bêta-gamma à la résonance a été fait à un facteur de proportionnalité près [1-2]. L'expérience peut se schématiser par la figure 1. Il est nécessaire de connaître les deux grandeurs sui-

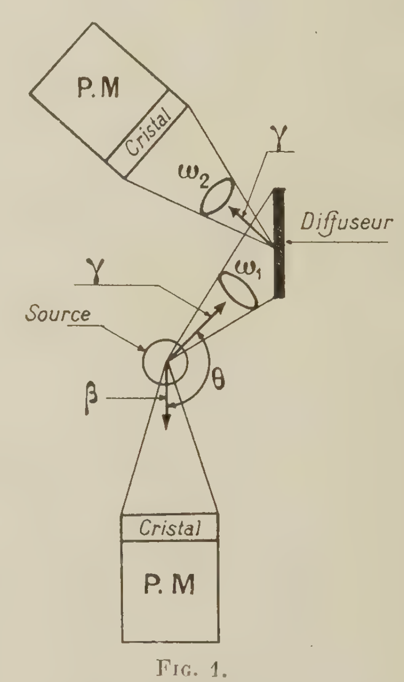


FIG. 1.

vantes, qui correspondent aux évolutions successives du gamma avant sa détection :

a) La probabilité $P_{\gamma.E_R}(\theta, W)\,dE$ qu'a un gamma d'être à l'énergie de résonance E_R à dE près quand il est émis simultanément avec un bêta d'énergie W et quand les directions du gamma et du bêta font entre elles un angle θ ; le taux de coïncidence est proportionnel à cette grandeur ;

b) Le taux de coïncidences bêta-gamma diffusé par résonance : pour que l'expérience soit possible, il faut que ce taux ne soit pas trop faible.

Calcul de $P_{\gamma.E_R}(\theta, W)$. — Les notations employées sont les mêmes que dans la référence [1]. Pour une

transition permise, Lewis et Curtis ont calculé la forme de la fonction de corrélation angulaire

$$dN(\theta) = C^{te}\left[1 - \frac{\alpha p E}{Wq}\cos\theta - \frac{\alpha p^2}{Wq}\cos^2\theta\right] \qquad (A)$$

ce qui donne pour $P_{\gamma.E_R}(\theta, W)$

$$P_{\gamma.E_R}(\theta, W)\,dE = \frac{M\,dE}{2Eq}\cdot\left[1 - \frac{\alpha p E}{Wq}\cos\theta - \frac{\alpha p^2}{Wq}\cos^2\theta\right] \qquad (1)$$

dans le système $\hbar = m_0 = C = 1$; $q = W_0 - W$:

M = masse du noyau.

W_0 et E = énergies totales des transitions bêta et gamma.

W et p = énergie totale et quantité de mouvement de l'électron.

$$\alpha = (B + 2/3.C)/A$$

A, B, C sont calculés en fonction des paramètres nucléaires des transitions bêta et gamma en se servant des références [1] et [6] par exemple. Ils dépendent : des constantes de couplage de la radioactivité bêta : C_V, C_S, C_A, C_T ; des matrices de transition Gamow-Teller et Fermi M_{GT} et M_F ; des spins j_1, j_2, j_3 des noyaux initiaux, intermédiaires et finaux ; des amplitudes M_1 et E_2 de la transition gamma.

Il faut ajouter à l'équation (1) les inégalités

$$E < \sqrt{W_0^2 - 1} \qquad (2)$$

$$q \geqslant |E + \cos\theta.\sqrt{W^2 - 1}|. \qquad (3)$$

La formule (1) ne se différencie de la formule (A) que par des considérations cinématiques sans faire intervenir les caractéristiques nucléaires des émissions bêta et gamma. Il suffit de démontrer (1) dans un cas particulier $\theta = \pi$ où nous faisons arbitrairement $\alpha = 0$: pour cela, nous posons $B = 0$ ce qui entraîne l'émission isotrope du neutrino par rapport au bêta et $C = 0$, ce qui entraîne l'émission isotrope du gamma par rapport à l'émission du bêta et du neutrino.

Remarques. — Nous aurions pu démontrer la formule (1) en cherchant la valeur de Cte qu'il fallait pour normaliser l'intégrale

$$\int_{E/M.(-q-p\cos\theta-E)}^{E/M.(q-p\cos\theta-E)} C^{te}.\left[1 - \frac{\alpha p}{Wq}\left(E + \frac{xM}{E}\right)\cos\theta - \frac{\alpha p^2}{Wq}\cos^2\theta\right]dx$$

x est le déplacement d'énergie du gamma à partir de la valeur E^2/M nécessaire pour qu'il soit à l'énergie de résonance et causé par l'émission du bêta et du neutrino. Les limites de l'intégrale définissent le domaine de variation x. La fonction à intégrer représente la fonction de corrélation entre un bêta et un gamma porté à l'énergie $(E^2/M + x)$.

Quand q tend vers zéro, d'après l'inégalité (3) la résonance n'a lieu que pour une valeur déterminée de θ ; à cet angle déterminé, dE tend vers zéro.

Jusqu'à présent, il n'a pas été tenu compte pour établir (1) de la largeur naturelle de la raie et de la largeur Döppler d'agitation thermique.

Le terme remplaçant Cte fait intervenir le facteur q^{-1} qui ne figurait pas dans la formule (A). Le taux de coïncidence bêta-gamma à la résonance, à énergie W fixe, mesuré en fonction de θ suit toujours la loi donnée par la formule (A); à angle fixe en fonction de l'énergie W de l'électron, il ne suit pas la loi indiquée par (A) car il faut tenir compte en plus de ce facteur q^{-1} variable.

Probabilité du processus de résonance. — La probabilité χ_θ qu'a un rayon gamma à l'angle θ en coïncidence avec un rayon bêta d'énergie W d'être diffusé par le processus de résonance est, en tenant compte d'une largeur de raie quelle que soit sa forme et son origine, naturelle ou thermique :

$$\chi_\theta = \frac{Mg\,\lambda^2\,\Gamma n}{8Eq}\cdot\left[1 - \frac{\alpha p E}{Wq}\cos\theta - \frac{\alpha p^2}{Wq}\cos^2\theta\right]. \qquad (4)$$

La section de diffusion au voisinage de la résonance étant :

$$\sigma = g\,\lambda^2\,\Gamma^2.(8\pi)^{-1}.[(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4]^{-1}$$
$$g = (1 + 2J_{exc})/(1 + 2J_f)$$

g = facteur statistique,
λ = longueur d'onde du gamma,
n = nombre d'atomes diffuseurs par cm^2,
Γ = largeur naturelle de la raie,
J_{exc} = spin du niveau émetteur gamma,
J_f = spin du niveau fondamental du noyau diffuseur où aboutit la transition gamma.

Γ est liée à la vie moyenne T_γ de la transition gamma par la relation : $\Gamma.T_\gamma = 1$. La formule (4) n'est valable que si la largeur de la raie gamma d'origine naturelle ou thermique est petite devant le déplacement d'énergie E^2/M du gamma à la résonance. On peut alors considérer $P_{\gamma.E_R}(\theta, W)$ constant sur toute la largeur de la raie.

Pour étudier l'ordre de grandeur du taux de coïncidence bêta-gamma à la résonance, il ne sera considéré que $\chi_{\pi/2}$. n doit être choisi d'après l'équation (4) pour que $\chi_{\pi/2}$ ne soit ni trop petit ni trop grand.

— Si $\chi_{\pi/2}$ est trop petit, l'expérience sera impossible à réaliser vu le faible taux de coïncidences.

— Si $\chi_{\pi/2}$ est trop grand, il n'y a plus de distinction entre les gamma qui sont portés à la résonance et ceux qui n'y sont pas ; si n est choisi trop grand, le diffuseur peut aussi diffuser les gamma qui sont assez loin de l'énergie de résonance.

$\chi_{\pi/2}$ doit être ajusté par le choix de n à quelques centièmes.

Si le processus de diffusion élastique prépon-

dérant non résonnant en compétition est la diffusion Rayleigh, estimons d'après Storruste [7] la section efficace σ_R

$$\sigma_R \leqslant 10^{-25}.(0,8/E)^3.(Z/82)^3$$

pour un angle de diffusion plus grand que $\pi/4$.

La condition pour que la diffusion par résonance soit prépondérante est

$$\Gamma \gg 3,4.10^{-9}.\frac{q}{g.A_M}.\left(\frac{Z}{82}\right)^3 \times \frac{1}{A} \qquad (5)$$

A_M et Z étant le nombre de masse et le nombre atomique du noyau, A étant l'abondance isotopique du noyau considéré dans le diffuseur.

Écrivons la condition pour que la largeur de raie Döppler d'origine thermique, relative aux noyaux émetteur et diffuseur, Γ_{T° soit petite par rapport au déplacement d'énergie du gamma E^2/M pour être à la résonance. C'est aussi la condition pour que l'énergie de recul du noyau après émission bêta nécessaire au gamma pour être à la résonance, soit grande devant l'énergie d'agitation thermique. Γ_{T° est calculé en tenant compte de la vitesse relative d'agitation thermique des noyaux émetteur et diffuseur gamma en les supposant à la même température (¹)

$$\Gamma_{T^\circ} = E.A_M^{-1/2}.1,4.10^{-5}$$

à la température ambiante normale. La condition s'écrit :

$$E \gg A_M^{1/2}.2,8.10^{-2}. \qquad (6)$$

Si la condition (6) n'est pas réalisée, la formule (4) n'est plus valable pour interpréter l'expérience.

Remarques :

1) Dans l'article [1], la largeur de raie due à l'agitation thermique est 0,02 eV pour la raie de 436 keV du ^{23}Ne alors que nous trouvons $\Gamma_{T^\circ} = 1,25$ eV en accord avec la référence [8].

2) $\chi_{\pi/2}$ permet de déterminer Γ, donc T_γ.

3) $T_\gamma \ll T_c$ est généralement une condition facile à satisfaire pour une source gazeuse. Elle conduit à l'inégalité suivante si l est le libre parcours moyen :

$$l \gg \left(\frac{W^2 - 1}{A_M}\right)^{1/2}.T_\gamma.$$

Taux de coïncidences bêta-gamma à la résonance. — Soient ω_1 l'angle solide du diffuseur gamma par rapport à la source, ω_2 l'angle solide du compteur gamma par rapport au diffuseur, ε l'efficacité photoélectrique du cristal détectant les rayons gamma, a la proportion de bêta pris dans la bande d'énergie étudiée par rapport à tout le spectre, et b la proportion de l'embranchement bêta-gamma considéré par rapport à tous les bêta, le taux de coïncidence bêta-gamma à la résonance t_c est :

$$t_c = k.\omega_1.\omega_2.\varepsilon.a.b.\chi_0 \qquad (7)$$

k est un coefficient voisin de 1 dû à la corrélation angulaire gamma à la résonance-gamma diffusé par résonance [8]. k est le rapport de la probabilité que le gamma soit diffusé sous l'angle solide ω_2 à l'angle considéré, et de la probabilité moyenne qu'un gamma soit diffusé sous un angle solide ω_2. A la suite d'une transition bêta permise, le gamma n'est pas polarisé rectilignement : la corrélation angulaire entre un gamma à la résonance et le gamma diffusé par résonance ne change pas avec l'angle θ entre les directions d'émission du bêta et du gamma (9).

Dans les meilleures conditions, estimons la valeur de t_c maxima. Si l'on choisit $\omega_1 = 10$ % ; $\omega_2 = 10$ % ; $a = 10$ % ; $b = 100$ % ; $\varepsilon = 25$ % ; $\chi = 5$ % on trouve $t_c \leqslant 10^{-5}$.

Regardons grossièrement l'influence de l'énergie E du gamma sur t_c. $\chi_{\pi/2}$ varie comme E^{-3}, λ variant comme E^{-1}. Pour un M_1 pur, Γ varie comme E^3[10] : $\chi_{\pi/2}$ est indépendant de l'énergie du gamma pour un M_1. Pour un E_2, Γ varie comme E^{-5} : $\chi_{\pi/2}$ varie comme E^2. ε varie à peu près entre 100 keV et 1 MeV comme $E^{-1,64}$ dans INa ; donc pour un E_2 pur il y a intérêt à prendre E assez grand et pour un M_1 pur, E assez faible.

Influence de l'état chimique de la source. — Il n'y a pas de difficultés si la source gazeuse est monoatomique, mais on est limité aux gaz rares radioactifs. Si la source gazeuse est polyatomique, il faut tenir compte des processus de dissociation et de choc entre le noyau de recul et le reste de la molécule, qui perturbent le recul du noyau ; T_γ est souvent plus grand que le temps nécessaire à rompre les liaisons chimiques ($\approx 10^{-14}$ sec) [11] : entre l'émission bêta et l'émission gamma, le noyau parcourt une distance plus grande que les dimensions moléculaires. L'énergie de liaison Q_{exc} du noyau de recul dans la molécule excitée après radioactivité bêta avec changement de Z d'un des constituants de la molécule, est très faible. Après le choc avec le reste de la molécule, la direction et la grandeur de la vitesse du noyau de recul n'est sensiblement modifié que si la masse du reste de la molécule est grande vis-à-vis de la masse du noyau de recul. Ces quelques considérations limitent pratiquement le choix des radioéléments pour l'expérience corrélation angulaire bêta-gamma à la résonance aux deux cas suivants : *a*) gaz rares radioactifs ; *b*) radioéléments qui peuvent former

(¹) Cette façon de traiter le problème est une simplification. En toute rigueur, il faut faire intervenir la température de Debye dans le solide constitué par le diffuseur. Voir Lamb (W. E.), *Phys. Rev.*, 1939, **55**, 190.

un hydrure gazeux à basse pression aux températures ordinaires.

Comme Q_{exc} doit être faible devant l'énergie E^2/M, il importe peu de savoir s'il y a ou non dissociation de la molécule.

Remarque. — Dans l'expérience de Goldhaber et autres [12] avec une source solide ou liquide sur ^{152}Eu, $T_\gamma \approx 3.10^{-14}$ sec, temps plus petit ou de l'ordre du temps nécessaires au noyau de recul pour parcourir les distances intermoléculaires et intramoléculaires. Le raisonnement précédent n'est donc plus valable.

Conclusion. — Le choix des émetteurs bêta à transition permise qui peuvent servir à une expérience de corrélation angulaire bêta-gamma à la résonance est très limité. Les inégalités rencontrées montrent que l'énergie du gamma ne doit être ni trop faible, vu l'agitation thermique, ni trop forte comparée à l'énergie de la transition bêta. La vie moyenne du noyau intermédiaire émetteur gamma doit être suffisamment faible pour que les processus de diffusion en compétition ne soient pas prépondérants. L'abondance isotopique du noyau final qui servira de diffuseur ne doit pas être trop faible. La proportion de l'embranchement bêta-gamma considéré doit être grande. Les spins des noyaux émetteurs bêta, émetteur gamma, et diffuseur doivent être connus ainsi que, dans une moindre mesure, la proportion de caractères E_2 et M_1 de la transition gamma. De plus l'état chimique de la source limite le choix des radioéléments possibles. Les quelques cas possibles sont ^{20}F, ^{23}Ne, ^{85}Kr, ^{123}Sn. Le plus favorable est ^{23}Ne bien que ne soit pas connu le rapport des matrices Fermi et Gamow-Teller : il peut y avoir ambiguïté car l'interprétation peut dépendre de ce rapport. ^{20}F nécessite un diffuseur constitué par du néon liquide. L'utilisation de ^{85}Kr et ^{123}Sn dépend de la valeur de la vie moyenne du niveau intermédiaire émetteur gamma : cette valeur n'est pas encore connue.

J'ai une dette de reconnaissance envers notre regretté Directeur de Laboratoire M. le Pr Joliot-Curie pour sa bienveillance et ses encouragements. Je remercie M. F. Suzor, Sous-Directeur du Laboratoire, M. R. Nataf et M. G. Charpak pour l'aide apportée et les discussions au sujet de ce travail.

Appendice. — Quand la condition (6) n'est pas respectée, il faut tenir compte de l'agitation thermique dans la source gazeuse à la température T_s et dans le diffuseur solide à la température de Debye T_D. Dans ces conditions χ_θ a l'expression suivante qui remplace la formule (4) :

$$\chi_\theta = \frac{Mg\ \lambda^2\ \Gamma n}{8Eq} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha pE}{Wq}\cdot\cos\theta - \frac{\alpha p^2}{Wq}\cos^2\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(\text{erf}\ x_1 + \text{erf}\ x_2) - \frac{\alpha p \cos\theta}{Wq}\left(\frac{2k(T_S + T_D)M}{\pi}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x_1^2} - e^{-x_2^2}\right)\right] \quad (4')$$

en posant

$$x_1 = \frac{q + p\cos\theta + E}{[2k(T_S + T_D).M]^{1/2}} \qquad x_2 = \frac{q - p\cos\theta - E}{[2k(T_S + T_D)M]^{1/2}}.$$

Manuscrit reçu le 5 novembre 1958.

Note ajoutée à la correction des épreuves. — Nous avons pris connaissance de l'article théorique de N. A. Burgov [13]. La première partie de cet article traite le même problème. La formule (11) de N. A. Burgov est identique à notre formule (4′), mises à part les notations, à un coefficient deux près. Sa formule (11) donne pour la section efficace χ_θ/η une valeur deux fois trop grande car sa formule (3) contient un facteur deux en trop.

Il faut d'autre part remarquer que son terme λ est uniquement lié à la corrélation angulaire bêta-neutrino et est indépendant du caractère E_2 ou M_1 de la transition gamma qui suit : N. A. Burgov ne tient pas compte de la corrélation angulaire entre la direction de l'émission du gamma et les directions des émissions bêta-neutrino. Cette corrélation angulaire existe, mais intégrée sur toutes les directions du neutrino la corrélation angulaire résultante bêta-gamma pour une transition bêta permise est nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lewis (R. R.) et Curtis (R. B.), *Phys. Rev.*, 1958, **110**, 910.
[2] Morita (M.), Morita (R. S.) et Yamada (M.), *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 237 et 1130.
[3] Wu (C. S.) et Schwarzchild (A.), Communication au Congrès International de Physique Nucléaire, juillet 1958, Dunod, Paris, 1959 (voir réf. 4).
[4] Nataf (R.), Congrès International de Physique Nucléaire, Paris, juillet 1958, Dunod, Paris, 1959.
[5] Herrmannsfeldt (W. B.), Burman (R. L.), Stahelin (P. S.), Allen (J. S.) et Braid (T. H.), *Phys. Rev.*, 1958, Lett, **1**, 61.
[6] Alder, Stech et Winther, *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 728.
[7] Siegbahn (K.), « Beta and gamma ray Spectroscopy », p. 258.
[8] Metzger, *Phys. Rev.*, 1955, **97**, 1258 ; 1956, **103**, 983.
[9] Hamilton (D. R.), Lemonik (A.) et Pipkin (F. M.), *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1191.
[10] Siegbahn (K.), « Beta and gamma ray Spectroscopy », p. 495.
[11] Haissinsky (M.), « Chimie nucléaire », p. 419.
[12] Goldhaber (M.), Grodzins (L.) et Sunyar (A.), *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 1015.
]13] N. A. Burgov, *J. Exptl. Theoret. Phys.* (U. R. S. S.), 1957, **33**, 655 ; *Soviet Physics*, (*J. E. T. P.*), 1958, **6**, 502.

CALCUL DE LA DIFFUSION ÉLASTIQUE SANS POLARISATION ET SANS ÉCHANGE D'UN ÉLECTRON DE VITESSE NULLE PAR UN ATOME NEUTRE DE SODIUM DANS L'ÉTAT FONDAMENTAL

Par Albert SALMONA et Pierre FRENKIEL,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Les auteurs calculent la section efficace de choc d'un électron très lent contre un atome de sodium dans l'état fondamental sans tenir compte des effets de polarisation et d'échange.

Abstract. — The cross section of the collision between a slow electron and a sodium atom in the ground state is computed without taking into account the effect of polarisation and of exchange.

Introduction. — Nous nous proposons de calculer la section efficace de choc entre un électron lent et un atome de sodium. On peut montrer en se fondant sur un principe variationnel, les fonctions $G_\Gamma(\Gamma'|\pi)$ étant seules « variées », que l'on aboutit au système d'équations intégro-différentielles suivant

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l_\Gamma(l_\Gamma + 1)}{r^2} + k_\Gamma^2\right] G_\Gamma(\Gamma'|r)$$
$$2 \sum_{\Gamma''} [V_{\Gamma\Gamma''} - W_{\Gamma\Gamma''}]\, G_{\Gamma''}(\Gamma'|r) \qquad (1)$$

avec

$$E = E_{\Gamma'} + \frac{1}{2} k_{\Gamma'}^2 = E_\Gamma + \frac{1}{2} k_\Gamma^2, \qquad (2)$$

où Γ' désigne la voie d'entrée, Γ la voie de sortie, E_Γ l'énergie de l'atome dans l'état Γ, k_Γ^2 celle de l'électron diffusé, avec

$$V_{\Gamma\Gamma''}(r_{N+1}) = \int \psi_\Gamma^*[r^{(N+1)}]$$
$$\left[-\frac{Z}{r_{N+1}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{N+1,i}}\right] \psi_{\Gamma''}[r^{(N+1)}]\, \mathrm{d}r^{(N+1)}, \qquad (3)$$

$$W_{\Gamma\Gamma''}\, G_{\Gamma''}(\Gamma'|r_{N+1}) = r_{N+1}$$
$$\times N \int \psi_\Gamma^*[r^{(N+1)}]\, [H - E]\, \psi_{\Gamma''}[r^{(N)}]\, \frac{1}{r_N}\, G_{\Gamma''}(\Gamma|r_N]\, \mathrm{d}r^{(N+1)}, \qquad (4)$$

$\psi_\Gamma[r^{(i)}]$ désignant le produit de fonctions antisymétrisées de l'atome par des fonctions angulaires et de spin de l'électron i. H désigne l'hamiltonien du système complet et E l'énergie totale ;

$$r_{N+1,i} = |\boldsymbol{r}_{N+1} - \boldsymbol{r}_i|.$$

Les formes asymptotiques des fonctions G sont exprimées moyennant la matrice de réactance R.

Ces équations étant évidemment très difficiles à étudier, il est intéressant de résoudre des équations plus simples — même si les hypothèses physiques que ces dernières supposent sont physiquement inacceptables — afin de posséder un système de fonctions qui puisse servir de point de départ au calcul par approximations successives.

Cas du sodium neutre entrant en collision avec un électron très lent. — La section élastique est seule à considérer si l'électron n'a pas suffisamment d'énergie pour porter l'atome (initialement à l'état fondamental) au premier état excité. La configuration du sodium neutre à l'état fondamental est $(1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s)$, c'est-à-dire 3 couches complètes et un électron de valence. Dans ce cas, seule l'onde de diffusion s aura une forme asymptotique finie qui, dans le cas où $k_{\Gamma'} = 0$, est $ar + b$, les ondes de diffusion p, d etc..., décroissant exponentiellement. Si on néglige l'effet de la déformation des ondes p, d, etc... sur l'onde s, c'est-à-dire, en particulier, la polarisation contenue dans les termes (3), et si l'on ne tient pas compte de l'effet d'échange représenté par les termes intégraux (4) dans les équations (1), le système (1) se réduit à une seule équation différentielle

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l_{\Gamma'}(l_{\Gamma'} + 1)}{r^2} - 2 V_{\Gamma'\Gamma'}(r) + k_{\Gamma'}^2\right] G_{\Gamma'}(\Gamma'|r) = 0, \qquad (1')$$

où

$$l_{\Gamma'} = 0 \quad \text{si} \quad k_{\Gamma'} = 0,$$

$$\Gamma' = a, \quad L = 0, \quad S = \frac{1}{2},$$

$$L^T = 0, \quad S^T, \quad M_L^T = 0, \quad M_S^T = \begin{cases} -1 \\ 0 \\ +1. \end{cases}$$

Les fonctions de l'atome de sodium étant tabulées par Hartree, d'une part, par Fock et Pethrashen, d'autre part, il est possible de calculer le potentiel $-2V_{\Gamma'\Gamma'}$ qui n'est autre que le potentiel central de l'atome dans l'état $3s$ auquel est soumis l'électron incident.

L'intégrale (3) dans la configuration

$$(1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s)$$

donne en effet

$$V_{\Gamma'\Gamma'}(r) = -\frac{1}{r}\,[11 - 2\,Y_0(1s, 1s|r) - 2\,Y_0(2s, 2s|r)$$
$$- 6\,Y_0(2p, 2p|r) - Y_0(3s, 3s|r)] \qquad (5)$$

avec

$$Y_0(nl, nl|r) = r\int_0^r P(nl|t)\frac{1}{t}P(nl|t)\,dt + r\int_r^\infty P(nl|t)\frac{1}{t}P(nl|t)\,dt, \quad (6)$$

les $P(nl|r|)$ étant tabulées,

$$Y_0(nl, nl|0) = 0, \quad Y_0(nl, nl|\infty) = 1, \quad (7)$$

les fonctions $Y_0(nl, nl|r)$ peuvent être calculées numériquement soit directement soit — ce qui est préférable — par résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dr^2}Y_0(nl, nl|r) = -\frac{P^2(nl|r)}{r} \quad (8)$$

qui est, moyennant (7), équivalente à (6). Les équations (8) ont été résolues numériquement en utilisant la méthode de Gauss-Jackson, à l'aide de machines à calculer mécaniques. Ensuite, par la même méthode — fondée sur les différences finies — nous avons résolu l'équation (1′) pour obtenir le coefficient D dans la forme asymptotique de $G_{\Gamma'}(\Gamma'|r)$ qui est $a(r + D)$. La section élastique totale étant $Q = \frac{4\pi}{k^2}\sum_0^\infty (2l+1)\sin^2\eta_l$, nous avons, avec les hypothèses précisées plus haut, les relations suivantes : $\eta_l \to A_l k^{2l+1}$, si $k \to 0$, $\eta_0 \to kD = A_0 k$, d'où $Q(k = 0) = 4\pi D^2$. Les résultats numériques donnent $D = 2{,}36$, $Q \# 22\,\pi a_0^2$, a_0 étant le rayon de l'atome d'hydrogène. Les mesures expérimentales laissent prévoir une section efficace qui est probablement bien plus élevée (de l'ordre de $400\,\pi\,a_0^2$), ce qui implique qu'il est indispensable de tenir compte des effets de polarisation et d'échange. Aussi nous sommes-nous actuellement attachés à calculer les corrections dues à l'échange et à la polarisation sur la fonction $G_{\Gamma'}(\Gamma'|r)$, solution de (1′) qui est prise comme première approximation.

Notations utilisées : Représentation

$$\gamma = aLSM_L\,M_S\,lm_l\,m_s,$$

où $aLSM_L\,M_S$ représentent les nombres quantiques de l'atome et $l\,m_l\,m_s$ ceux de l'électron diffusé.

Représentation $\Gamma = aLlL^T\,S^T\,M_L^T\,M_S^T$, où L^T et S^T sont obtenus par couplage de L et de l d'une part, de S et du spin de l'électron diffusé, d'autre part ; i désignant le $i^{\text{ème}}$ électron $\boldsymbol{r}_i = (r_i, \hat{r}_i)$, où $\hat{r}_i$ désigne l'ensemble des coordonnées angulaires ; $\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{r}_i, \sigma_i) = (r_i, \hat{r}_i, \sigma_i)$, σ_i étant le spin.

Si l'on considère un système à $N + 1$ électron (N pour l'atome), le symbole $r^{(i)}$ désigne l'ensemble $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots \boldsymbol{x}_{N+1}) + (\hat{r}_i, \sigma_i)$, c'est-à-dire toutes les coordonnées sauf r_i. $dr^{(i)}$ désigne de même l'élément de volume sur toutes les coordonnées sauf r_i. Dans tout ce qui précède, les fonctions de l'atome sont supposées exactes. Les problèmes de choc se ramènent essentiellement au calcul de la fonction de l'électron diffusé $G_\Gamma(\Gamma'|r)$ où Γ' désigne la voie d'entrée du système, et Γ, la voie de sortie.

Les équations sont exprimées dans le système d'unités atomiques où $e = \hbar = m = c = 1$.

Ce présent travail est le premier résultat obtenu par l'équipe de chercheurs français dirigée par M. T. Kahan dans le cadre du programme établi conjointement par ce dernier et un groupe de chercheurs anglais que dirige le Dr Seaton de l'University College de Londres, groupe qui depuis de nombreuses années s'est spécialisé dans les calculs des sections de chocs atomiques.

L'équipe française tient à exprimer sa vive reconnaissance à M. Coulomb, Directeur du Centre National de la Recherche Scientifique pour l'aide et l'intérêt qu'il porte à ses travaux.

Manuscrit reçu le 16 janvier 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaires de T. Kahan sur la théorie des collisions atomiques. (Exposés de MM. Seaton, Percival et Arnous).

[2] Hartree (D. R.), The calculation of atomic structures, London, 1957.

[3] Hartree (D. R.), Numerical Analysis, 2e édition, 1958.

[4] Hartree (D. R.) et (W.), *Proc. Roy. Soc.*, 1948, A **193**, 304.

[5] Fock-Petraschen, *Phys. Z. Sov. Union*, 1934, **6**, 402.

INFORMATION

Conférence Internationale sur la Physique des Semiconducteurs, Prague, 1960. — L'Académie tchécoslovaque des Sciences organise une Conférence Internationale sur la Physique des Semiconducteurs qui aura lieu du 29 août au 2 septembre à Prague sous le patronage de l'Union internationale de Physique Pure et Appliquée, et qui fera suite à celles de Reading en 1950, d'Amsterdam en 1954, de Garmisch-Partenkirchen en 1956 et de Rochester en 1958.

Secrétaire du Comité Organisateur : Dr. Miloš Matyáš, Institut de physique appliquée de l'Académie tchécoslovaque des Sciences, Prague 5, Cukrovarnická 10, Tchécoslovaquie.

EXPOSÉ ET MISE AU POINT BIBLIOGRAPHIQUE

L'EFFET POYNTING-ROBERTSON

par G. GUIGAY,
Observatoire de Marseille.

Résumé. — Soit une particule se mouvant dans le champ de gravitation du Soleil et soumise à l'action de son rayonnement. Poynting et Robertson ont montré que la pression de radiation n'est pas exactement dirigée suivant la droite Soleil-particule, mais possède une composante opposée à la vitesse de cette dernière. Une démonstration de cet effet est donnée pour le cas d'un rayonnement électro-magnétique et pour celui d'un rayonnement corpusculaire.

L'étude du mouvement de la particule montre que le demi-grand axe et l'excentricité de son orbite décroissent continuellement : la particule tombe en spirale sur le Soleil. Pour un petit corps sphérique de 10^{-2} centimètre de rayon et de densité 4 le temps de chute est de l'ordre de 10^5 ans. Pour une densité constante, ce temps est proportionnel au rayon.

Les conséquences de cet effet sur la disposition des orbites au sein d'un courant météorique, sur l'équilibre du nuage zodiacal et sur la capture de matière météorique par la Terre sont passés en revue.

Abstract. — Let a particle move in the sun's gravitation field. According to Poynting and Robertson the radiation pressure is not exactely directed along the straight line Sun-particle, but possess a component opposite to the particle's velocity. A simplified demonstration is given for the case of a solar electro-magnetic radiation and for that of a corpuscular radiation. It is shown that the semi-major axis and the eccentricity of the orbit of the particle decrease continually : the particle falls in spiral on the Sun. For a particle of 10^{-2} centimetre radius and a density of 4, the time of fall is about 10^5 years. For constant density this time is proportional to the radius.

A study is given of the effects on the distribution of the orbits in a meteoric current, on the zodiacal cloud, and on the capture of meteoric bodies by the earth.

1. — L'effet Poynting-Robertson joue un rôle important dans l'évolution d'un nuage de poussières entourant une étoile. Il entraîne la chute en spirale des particules sur l'étoile en un temps de l'ordre de quelques millions d'années. Cet effet a été signalé pour

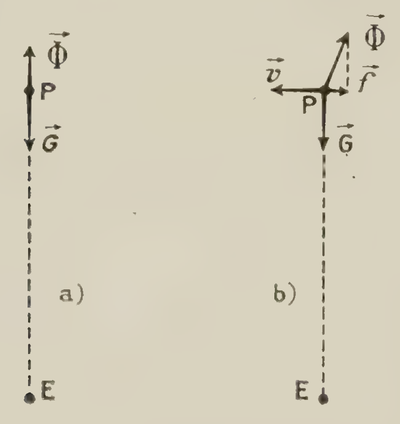


FIG. 1.

la première fois par Poynting, mais c'est Robertson [1] qui, en 1937, en a donné la démonstration fondée sur la Théorie de la Relativité et le Calcul Tensoriel. Nous nous proposons de donner ici une démonstration plus simple de cet effet et d'en examiner les conséquences astronomiques.

Considérons une particule P se trouvant dans le champ de gravitation d'une étoile E et exposée à son rayonnement. Indépendamment de l'attraction newtonienne $\boldsymbol{G}$, P est soumise à la pression de radiation Φ. Si P est immobile, Φ est opposée à la direction de l'étoile (*fig.* 1 *a*) ; il n'en est plus de même, comme nous allons le montrer, dans le cas où la particule est en mouvement : on voit apparaître une composante $\boldsymbol{f}$ de la pression de radiation opposée à sa vitesse $\boldsymbol{v}$. (*fig.* 1 *b*). Il en résulte un freinage qui constitue l'effet Poynting-Robertson.

2. — Nous admettrons que la particule est sphérique, de diamètre nettement plus grand que la longueur d'onde de la lumière incidente et parfaitement absorbante.

Considérons deux systèmes de référence :

1° un système S lié à l'étoile E et constitué d'axes de directions fixes ;

2° un système S', en translation uniforme par rapport à S et *instantanément* au repos par rapport à la particule P, c'est-à-dire ayant un vecteur-vitesse par rapport à *S* équipollent à celui de la particule à l'instant considéré.

Nous conviendrons d'affecter d'un accent les quantités relatives au système S' et de ne pas accentuer les quantités relatives au système S.

Pour l'observateur de S' la pression de radiation s'exprime par

$$\Phi' = A'W' \qquad (1)$$

A' désignant la section droite de la particule et W' la densité de l'énergie du rayonnement. W' n'est pas un invariant, sa valeur W dans le système S est reliée à sa valeur dans le système S′ par la relation :

$$W' = \frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left\{W - \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\sigma}}{c^2} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}.(\boldsymbol{\sigma} - [\boldsymbol{vp}.])\right\}$$

$$= \frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(W - \frac{2\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\sigma}}{c^2} + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}.[\boldsymbol{vp}]\right) \qquad (2)$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse de la particule pour l'observateur du système S et $\boldsymbol{\sigma}$ la densité du courant d'énergie dans ce système ; c représente la vitesse de la lumière [2].

La notation $[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{p}]$ désigne le produit contracté

$$v^{\alpha}\, p_{i\alpha} \qquad (3)$$

du vecteur-vitesse $\boldsymbol{v}$ par le tenseur des tensions de Maxwell dans le système S.

Mais si, dans le système S, on désigne par $\boldsymbol{l}$ le vecteur unitaire porté par la direction du rayon lumineux :

$$\boldsymbol{\sigma} = c.W\boldsymbol{l} \qquad (4)$$

d'où

$$W' = \frac{1}{1-(v^2/c^2)}\left(W - 2\frac{W}{c}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l} + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}[\boldsymbol{vp}]\right). \qquad (5)$$

On voit que le second terme de la parenthèse est de l'ordre de v/c alors que le troisième est de l'ordre de v^2/c^2. *Nous conviendrons de négliger les termes de cet ordre*, de sorte que :

$$W' = \frac{W}{1-(v^2/c^2)}\left(1 - \frac{2}{c}\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}\right)$$

ou, à la même approximation :

$$W' = W\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}}{c}\right)^2. \qquad (6)$$

D'après l'équation (1) la pression de radiation s'exprime alors par :

$$\Phi' = A'W\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}}{c}\right)^2.$$

Tel est le module de la pression de radiation pour l'observateur du système S'. En réalité cette pression est un vecteur porté par la direction du rayon lumineux pour ce même observateur ; son expression complète est :

$$\boldsymbol{\Phi}' = A'W\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}}{c}\right)^2.\boldsymbol{l}' \qquad (7)$$

$\boldsymbol{l}'$ désignant le vecteur unitaire porté par le rayon lumineux pour l'observateur de S'.

Pour passer à la pression de radiation pour l'observateur S il est nécessaire d'utiliser le théorème de la *Relativité des forces*. Considérons *pour un instant* deux systèmes d'axes dirigés comme l'indique la figure 2, le système Ox′y′z′ étant en translation uniforme par rapport à Oxyz. Dans ce cas une même force agissant sur un point instantonément au repos *dans le système O′x′y′z′* a, dans les deux systèmes, des composantes XYZ et $X'Y'Z'$ liées par les relations

$$X = X' \qquad Y = \alpha Y' \qquad Z = \alpha Z'$$

où

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \cdots$$

c'est-à-dire que pour obtenir la force relative au système Oxyz il faut ajouter au vecteur force relatif à O′x′y′z′ un vecteur supplémentaire de composantes

$$0 \qquad -\frac{v^2}{2c^2}Y' \qquad -\frac{v^2}{2c^2}Z'.$$

A l'approximation indiquée ce vecteur supplémentaire est négligeable. Revenant à notre problème nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}' = A'W\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}}{c}\right)^2\boldsymbol{l}'.$$

Pour achever d'écrire l'expression de Φ, il faut exprimer $\boldsymbol{l}'$ en fonction de $\boldsymbol{l}$. Pour cela appliquons le théorème de la composition des vitesses au *vecteur-vitesse* de la lumière

$$\boldsymbol{u}' = c.\boldsymbol{l}' \qquad \boldsymbol{u} = c.\boldsymbol{l}.$$

La relation de composition des vitesses sous forme vectorielle s'écrit [3] :

$$\boldsymbol{u}' = \left[-\left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}}{v^2}\right)\boldsymbol{v} + \alpha\left(\boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}}{v^2}.\boldsymbol{v}\right)\right].\frac{1}{1-(\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}/c^2)}$$

c'est-à-dire :

$$c\boldsymbol{l}' = \left[-\left(1 - c.\frac{\boldsymbol{lv}}{v^2}\right)\boldsymbol{v} + \alpha\left(c\boldsymbol{l} - \frac{c\boldsymbol{l}.\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right)\right]\frac{1}{1-(\boldsymbol{l}.\boldsymbol{v}/c)}$$

ou, en remarquant qu'à l'approximation indiquée α se réduit à l'unité :

$$\boldsymbol{l}' = \frac{1}{1-(\boldsymbol{l}.\boldsymbol{v}/c)}.\left(\boldsymbol{l} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)$$

d'où :

$$\boldsymbol{\Phi} = A'W\left(1 - \frac{\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{v}}{c}\right)\left(\boldsymbol{l} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) = A'W\left(\boldsymbol{l} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{v}}{c}.\boldsymbol{l}\right). \qquad (9)$$

Il reste à exprimer la force de gravitation de l'étoile E qui comprend [4] :

1° la force newtonienne classique

$$-\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l}$$

ou m est la masse de la particule, r la distance EP et μ le produit $F.\,M$ de la constante F de la gravitation par la masse de E,

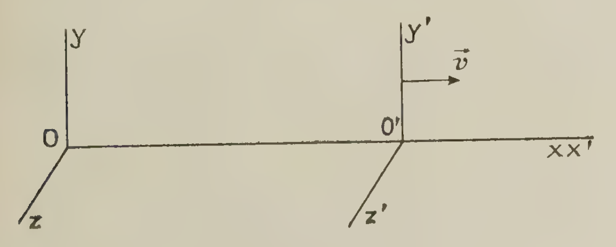


Fig. 2.

2° des forces supplémentaires :

a). une force dirigée suivant le rayon EP et d'expression :

$$\frac{\mu}{r^2}\left[-\frac{2\mu}{c^2 r}+\frac{2v^2}{c^2}-\frac{2r'^2}{c^2}-\frac{r'^2}{c^2-(2\mu/r)}\right].\boldsymbol{l}$$

où

$$r' = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$$

b) une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire de P dans le sens du mouvement et de module

$$\frac{2\mu r'|v|}{r^2[c^2-(2\mu/r)]}.$$

A l'approximation indiquée nous ne devons conserver que la force newtonienne et la force

$$\frac{2\mu^2}{c^2\, r^3}\boldsymbol{l}$$

toutes les autres étant de l'ordre de v^2/c^2

Finalement l'équation du mouvement de la particule s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) \sim m.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l} + \frac{2\mu^2}{c^2\, r^3}\boldsymbol{l} + A'W\left(\boldsymbol{l}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}-\frac{\boldsymbol{l}.\boldsymbol{v}}{c}.\boldsymbol{l}\right).$$

Si nous négligeons encore le terme $\frac{2\mu^2}{c^2\, r^3}\boldsymbol{l}$ dont le rapport à la force newtonienne est de l'ordre de $\frac{\mu}{c^2\, r}$ il reste :

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l} + A'W\left(1-\frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}}{c}\right)\boldsymbol{l} - \frac{A'W}{c}\boldsymbol{v}$$

ou en posant

$$A'W = f \qquad (10)$$

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l} + f\left(1-\frac{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{l}}{c}\right)\boldsymbol{l} - \frac{f}{c}\boldsymbol{v}. \qquad (11)$$

Le deuxième terme du second membre exprime la pression de radiation affectée d'un « facteur Doppler ». Au dernier terme correspond l'effet Poynting-Robertson. D'après la démonstration précédente où nous avons utilisé les directions différentes de la lumière dans les deux systèmes de référence, il apparaît comme lié à l'aberration.

3. — Whipple [5] a étendu l'effet Poynting-Robertson au cas où la particule est exposée, non plus à un rayonnement électro-magnétique, mais à un rayonnement corpusculaire. Notons que, d'après les idées modernes, le rayonnement corpusculaire des étoiles, consistant surtout en atomes et ions d'hydrogène est extrêmement important ; il serait même l'élément directeur de leur évolution. Par suite de ce rayonnement corpusculaire la masse d'une étoile diminuerait considérablement au cours de son existence : la masse du soleil par exemple aurait été à l'origine cinq à huit fois plus grande qu'aujourd'hui [6].

Conservons les mêmes notations que précédemment, remplaçant seulement la vitesse de la lumière par la vitesse q des corpuscules incidents (q' dans le système S' lié à la particule). Le vecteur vitesse d'un corpuscule dans les deux systèmes s'exprime par :

$$\boldsymbol{q} = q\boldsymbol{l} \qquad \boldsymbol{q}' = q'\boldsymbol{l}'. \qquad (12)$$

Nous admettrons que les vitesses v et q sont assez petites par rapport à c pour que les rapports v^2/c^2 et q^2/c^2 soient négligeables. Dans ces conditions la loi de composition des vitesses et la loi fondamentale de la dynamique se réduisent à leurs expressions non relativistes.

La masse totale des corpuscules qui frappent la particule P pendant le temps dt est :

$$A'd.q'\,\mathrm{d}t$$

d désignant la masse totale des corpuscules dans un centimètre cube. Leur quantité de mouvement est

$$A'd.q'^2\,\mathrm{d}t.\boldsymbol{l}'.$$

Si les corpuscules incidents restent, après le choc, unis à la particule, le théorème de la quantité de mouvement donne :

$$m.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = A'd.q'^2\,\boldsymbol{l}'.$$

Le premier membre représente la force Φ exercée par les corpuscules sur la particule P.

$$\boldsymbol{\Phi} = A'd.q'^2\,\boldsymbol{l}' = Ad.q'\boldsymbol{q}'.$$

Mais

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{v}$$

$$q'^2 = q^2 + v^2 - 2\boldsymbol{q}.\boldsymbol{v}.$$

Admettons encore que la vitesse v de la particule est petite par rapport à celle des corpuscules incidents, de sorte que l'on peut négliger v^2/q^2, alors :

$$q' = q[1-(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{v}/q^2)]$$

d'où

$$\boldsymbol{\Phi} = A'd.q[1-(\boldsymbol{q}.\boldsymbol{v}/q^2)]\,(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}). \qquad (13)$$

L'équation du mouvement de la particule s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l} + A'd.q\left(1-\frac{\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{v}}{q^2}\right)(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{v})$$

ou

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l} + A'd.q^2\left(1-\frac{\boldsymbol{l}.\boldsymbol{v}}{q}\right)\left(\boldsymbol{l}-\frac{\boldsymbol{v}}{q}\right)$$

ou, en posant

$$A'd.q^2 = f_1 \qquad (14)$$

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu\, m}{r^2}\boldsymbol{l} + f_1\left(1-\frac{\boldsymbol{l}.\boldsymbol{v}}{q}\right)\boldsymbol{l} - \frac{f_1}{q}\boldsymbol{v}. \qquad (15)$$

L'analogie des formules (11) et (15) apparaît pleinement si l'on remarque que la loi d'équivalence matière-énergie fait correspondre à la densité d'énergie W une densité matérielle

$$\frac{W}{c^2} = d,$$

de sorte que l'équation (10) s'écrit

$$f = A'dc^2.$$

4. Mouvement d'une particule dans le champ de gravitation du soleil.

Introduisons les données relatives à la particule et au rayonnement. Nous ne tiendrons compte que du rayonnement électro-magnétique. La Constante solaire S c'est-à-dire le flux reçu à la distance du Soleil où se trouve la Terre vaut :

1,35 10^6 ergs par centimètre-carré et par seconde.

Si b désigne la distance de la Terre au Soleil l'éclairement à la distance r est :

$$\frac{Sb^2}{r^2}.$$

Ce nombre exprime l'énergie contenue dans un cylindre de 1 cm² de base et de longueur c, de sorte que la densité de l'énergie est :

$$W = \frac{Sb^2}{cr^2}.$$

L'équation (10) donne :

$$f = \frac{A'Sb^2}{cr^2} = \frac{mc}{r^2}\frac{A'Sb^2}{mc^2}$$

ou en posant :

$$\frac{ASb^2}{mc^2} = \sigma, \tag{16}$$

$$f = \frac{mc}{r^2}\sigma. \tag{17}$$

Pour une particule sphérique de densité ζ et de rayon s, σ est une constante

$$\sigma = \frac{3}{4s\,\zeta}\frac{Sb^2}{c^2}.$$

Pour :

$$b = 150.10^{11}\ \text{cm} \qquad c = 3.10^{10}\ \text{cm/sec}$$

$$\sigma = \frac{2.53}{s\,\zeta}10^{11}. \tag{18}$$

L'équation vectorielle (11) s'écrit en coordonnées polaires :

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -\frac{\mu\, m}{r^2} + \frac{mc}{r^2}\sigma\left(1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right) - \frac{m\,\sigma}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\frac{m\,\sigma}{r}\frac{d\varphi}{dt}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu - \sigma c}{r^2} - \frac{2\sigma}{r^2}\frac{dr}{dt} \\ &\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\sigma\frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Dans la première équation (19) le terme

$$-\frac{\mu - \sigma c}{r^2}$$

est analogue à un terme de gravitation mais cette dernière est diminuée par la pression de radiation et remplacée par une « gravitation effective » où la quantité :

$$\mu = Fm \qquad (F = \text{C}^{\text{te}}\ \text{de la gravitation})$$

est remplacée par

$$\mu' = \mu - \sigma c = Fm - \sigma c. \tag{20}$$

Nous considérerons le cas où

$$\sigma c < Fm$$

de sorte que la gravitation l'emporte sur la pression de radiation. La deuxième équation (19) s'intègre immédiatement et donne :

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = h - \sigma\varphi \tag{21}$$

h étant une constante. L'expression au premier membre est le double de la vitesse aréolaire de la particule P. Cette quantité, qui serait constante dans un mouvement keplérien (correspondant à $\sigma = 0$) diminue progressivement lorsque croît l'angle φ balayé par le rayon vecteur. h est la valeur du double de la vitesse aréolaire à l'origine des temps. Posons :

$$H = r^2\frac{d\varphi}{dt} = h - \sigma\varphi. \tag{22}$$

Quand H s'annulera, sans que r soit nul, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

de sorte que la vitesse de la particule se réduira à sa composante suivant le rayon vecteur et il en sera de même de son accélération d'après la 2ᵉ équation (19). Avec les forces agissantes de telles « conditions initiales » ne peuvent entraîner qu'un mouvement rectiligne dirigé vers le Soleil ou dans la direction opposée. L'angle φ ne peut excéder la valeur :

$$\varphi = \frac{h}{\sigma}$$

ce qui limite le nombre N des révolutions à

$$N = \frac{h}{2\,\pi\sigma}. \tag{23}$$

Robertson [1] étudie le cas d'une particule décrivant autour du Soleil une orbite circulaire de rayon :

$$r_0 = \text{une unité astronomique},$$

sa vitesse angulaire n étant donnée pour la 3ᵉ loi de Képler :

$$n^2\,r_0^3 = \mu'.$$

Dans ces conditions.

$$h = nr_0^2 = r_0^2\sqrt{\mu'/r_0^3} = \sqrt{\mu' r_0}$$

d'où

$$N = \sqrt{\mu' r_0}/2\,\pi\sigma. \tag{24}$$

Dans un calcul approximatif on peut prendre pour μ'

sa valeur newtonienne déduite de l'application à la Terre de la 3e loi de Kléper, soit :

$$\mu = \frac{4\ \pi^2\ b^3}{T^2}$$

T désignant la durée de la révolution de la Terre :

$$31{,}6.10^6 \text{ secondes.}$$

Avec la valeur déjà donnée de b, on trouve

$$\mu = 133.10^{24}.$$

Pour

$$s = 1 \text{ cm} \qquad \zeta - 5{,}5$$

c'est-à-dire, d'après (18)

$$\sigma = 4{,}6.10^{10}$$

on trouve.

$$N = 1{,}5.10^8.$$

Mais s peut être beaucoup plus faible et N est proportionnel à s d'après (24) et (18). Avec $s = 10^{-3}$ centimètre, on trouve seulement :

$$N = 1{,}5.10^5.$$

Ce résultat justifie la conclusion de Roberston d'après laquelle l'effet étudié peut entraîner la chute des particules sur le Soleil en un temps suffisamment court pour avoir une signification cosmogonique.

L'équation de l'orbite s'obtient en éliminant t entre les équations (19) et (22). Posons :

$$r = 1/u. \tag{25}$$

L'équation (22) s'écrit :

$$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = Hu^2 \tag{26}$$

et la première équation (19) :

$$-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{u^3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 - H^2\,u^3 = -\mu' u^2 + 2\sigma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

ou, en remplaçant $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$ par leurs valeurs :

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi).(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = Hu^2(\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$= Hu^2\left[Hu^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2}\right) + 2Hu\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - \sigma\,u^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{\sigma}{H}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} + u = \frac{\mu'}{H^2}. \tag{27}$$

Robertson remarque que σ/h est en général une petite quantité. Considérons par exemple une particule se mouvant à la vitesse de 30 kilomètres par seconde sur un orbite circulaire de rayon égal à une unité astronomique. Si nous prenons pour h la valeur $r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ trop faible d'après (22), nous obtenons

$$h = r.r(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = rv = 15.10^{12}.3.10^6 = 4{,}5.10^{19}$$

d'où, d'après (18)

$$\sigma/h = (0{,}56/s\ \zeta).10^{-8}.$$

Pour

$$s = 10^{-3} \text{ cm} \qquad \zeta = 5{,}5$$

$$\sigma/h \ \# \ 10^{-6}$$

On peut donc développer les divers termes de l'équation (27) suivant les puissances de $\dfrac{\sigma}{h}$. Négligeant les termes en $(\sigma/h)^2$, on obtient :

$$\frac{\sigma}{H} = \frac{\sigma}{h - \sigma\varphi} \sim \frac{\sigma}{h}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + \frac{\sigma}{h}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} + u = \frac{\mu'}{h^2}\left(1 + \frac{2\sigma}{h}\varphi\right). \tag{28}$$

L'équation (28) admet l'intégrale générale :

$$u = B\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{2h}\varphi}\cos\left(\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{4h^2}}\,\varphi - \gamma\right) + \frac{2\mu'\sigma}{h^3}\varphi + \frac{\mu'}{h^2}\left(1 - \frac{2\sigma^2}{h^2}\right) \tag{29}$$

B et γ étant des constantes

Développant encore les divers termes suivant les puissances de σ/h et négligeant les termes en $(\sigma/h)^2$, on obtient

$$u = \frac{\mu'}{h^2}\left[1 + \frac{2\sigma}{h}\varphi + \frac{Bh^2}{\mu'}\left(1 - \frac{\sigma}{2h}\varphi\right)\cos(\varphi - \gamma)\right]$$

ce que l'on peut écrire :

$$u = \frac{1 + \dfrac{Bh^2}{\mu'}\dfrac{[1 - \sigma\varphi/2h]\ \cos\ (\varphi - \gamma)}{1 + 2\sigma\varphi/h)}}{\dfrac{h^2}{\mu'}\dfrac{1}{1 + (2\sigma\varphi/h)}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{Bh^2}{\mu'}\left(1 - \dfrac{\sigma}{2h}\varphi\right)\left(1 - \dfrac{2\sigma}{h}\varphi\right)\cos(\varphi - \gamma)}{\dfrac{h^2}{\mu'}\left(1 - \dfrac{2\sigma}{h}\varphi\right)}$$

$$u = \frac{1 + \dfrac{Bh^2}{\mu'}[(1 - 5\sigma\varphi/2h)]\cos(\varphi - \gamma)}{\dfrac{h^2}{\mu'}[1 - (2\sigma\varphi/h)]}. \tag{30}$$

L'équation (30) peut être ramenée à l'équation képlérienne :

$$u = \frac{1 + e\cos(\varphi - \gamma)}{p} \tag{31}$$

en posant :

$$\begin{cases} p = \dfrac{h^2}{\mu'}\left(1 - \dfrac{2\sigma}{h}\varphi\right) \\ e = \dfrac{Bh^2}{\mu'}\left(1 - \dfrac{5\sigma}{2h}\varphi\right). \end{cases} \tag{32}$$

Les quantités p et e jouant le rôle d'éléments osculateurs de l'orbite de la particule, les expressions :

$$\delta p \ - \frac{2\sigma\,h\,\varphi}{\mu'} \qquad \delta e = -\frac{5}{2}\frac{Bh\,\sigma\varphi}{\mu'} \tag{33}$$

représentent les perturbations du premier ordre en σ/h. On en tire

$$\delta p/p = -2\sigma\varphi/h \quad \delta e/e = -(5/2)(\sigma/h).\varphi. \quad (34)$$

L'équation de définition du paramètre :

$$p = a(1 - e^2)$$

permet de calculer la perturbation du demi-grand axe

$$\delta p = \delta a(1 - e^2) - 2ae\,\delta e$$

$$\delta a = \frac{\delta p}{1 - e^2} + \frac{2ae}{1 - e^2}\delta e$$

ou, en remplaçant δp et δe par leurs valeurs

$$\delta a = -\frac{\sigma}{h}a\frac{2 + 3e^2}{1 - e^2}.\varphi. \quad (35)$$

L'angle φ ne croît pas proportionnellement au temps mais s'exprime par :

$$\varphi = \varphi_0 + nt + \text{des termes périodiques.}$$

Nous obtiendrons les inégalités *séculaires* de p, a, e en réduisant φ à :

$$\varphi = \varphi_0 + nt$$

que l'on peut écrire plus simplement

$$\varphi = nt$$

en choisissant convenablement la direction de l'axe polaire. L'expression des inégalités séculaires est donc :

$$\delta e = -\frac{5}{2}\frac{\sigma}{h}ent \quad \delta p = -\frac{2\sigma}{h}pnt \quad \delta a = -\frac{\sigma}{h}a\frac{2 + 3e^2}{1 - e^2}nt,$$

Puisqu'on ne désire que les inégalités séculaires du premier ordre en σ/h on peut prendre pour a, e, p, n la valeur de ces éléments pour $t = 0$. Une relation connue du problème des deux corps donne :

$$p = h^2/\mu'$$

(puisque h est la constante des aires à l'époque $t = 0$). La 3e loi de Kepler donne :

$$n^2 a^3 = \mu' = \frac{h^2}{a(1 - e^2)}$$

$$n = \frac{h}{a^2\sqrt{1 - e^2}} \quad (36)$$

d'où

$$\delta e = -\frac{5}{2}\frac{\sigma e}{a^2\sqrt{1 - e^2}}t \quad \delta a = -\frac{\sigma}{a}\frac{2 + 3e^2}{(1 - e^2)^{3/2}}.t \quad (37)$$

Les équations (37) ne sont pas valables pendant un temps très long car certains termes négligés, en $\left(\frac{\sigma}{h}\right)^2$ étaient multipliés par φ ; ils risqueraient de ce fait de devenir importants au bout d'un temps suffisant. On peut, avec Wyatt et Whipple [7] les appliquer pendant un temps δt suffisamment court (temps qui peut cependant comprendre plusieurs révolutions). On a alors

$$\delta e = -\frac{5}{2}\frac{\sigma e}{a^2\sqrt{1 - e^2}}\delta t \quad \delta a = -\frac{\sigma}{a}\frac{2 + 3e^2}{(1 - e^2)^{3/2}}\delta t.$$

Revenant ensuite aux variations de a et e pendant un temps très long on peut identifier les quotients $\delta e/\delta t$ et $\delta a/\delta t$ avec les dérivées de/dt et da/dt. On obtient

$$\frac{de}{dt} = -\frac{5}{2}\frac{\sigma e}{a^2\sqrt{1 - e^2}} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\sigma}{a}\frac{2 + 3e^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (38)$$

où a et e ne sont plus considérées comme des constantes au second membre. Ces formules montrent que a et e décroissent continuellement ; la particule tombe en spirale sur le Soleil.

La première équation (38) admet la solution particulière :

$$e = 0$$

qui entraîne

$$da/dt = -2\sigma/a$$

$$a\,da = -2\sigma\,dt$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - a_0^2) = -2\sigma t.$$

Cette solution concerne le cas d'une orbite primitive circulaire. La trajectoire demeure circulaire mais son rayon décroît continuellement. La particule tombe sur le Soleil au bout d'un temps :

$$t = a_0^2/4\sigma$$

ou, en remplaçant σ par sa valeur (18)

$$t = \frac{a_0.s\,\zeta}{4.2{,}53.10^{11}} \quad (39)$$

Cette formule a été établie dans le système CGS. Si l'on exprime a_0 en unités astronomiques (15.10^{12} centimètres) et t en années ($31.6.10^6$ secondes) on obtient :

$$t_{\text{ans}} = 7a_{0\,\text{UA.}}^2\,s.\zeta.10^6 \quad (40)$$

s restant exprimé en centimètres et ζ étant la densité de la particule par rapport à l'eau.

Dans le cas d'une orbite excentrique, on tire des équations (38)

$$\frac{da}{de} = \frac{2a(2 + 3e^2)}{5\,e(1 - e^2)}$$

$$5.\frac{da}{a} = \frac{2(2 + 3e^2)}{e(1 - e^2)}de = \frac{4\,de}{e} + \frac{5\,de}{1 - e} - \frac{5\,de}{1 + e}$$

d'où

$$a = \frac{Ke^{4/5}}{1 - e^2} \quad (41)$$

K est une constante que l'on peut déterminer en appliquant cette équation à l'époque origine. Alors :

$$a_0 = \frac{Ke_0^{4/5}}{1 - e_0^2} \quad K = \frac{a_0(1 - e_0^2)}{e_0^{4/5}} = \frac{q_0(1 + e_0)}{e_0^{4/5}} \quad (42)$$

q_0 étant la distance périhélie à l'époque $t = 0$.

En portant la valeur (41) de a dans la première équation (38) on obtient

$$dt = -\frac{2K^2}{5\sigma}\frac{e^{3/5}}{(1 - e^2)^{3/2}}de$$

$$t - t_0 = -\frac{2K^2}{5\sigma}\int_{e_0}^{e}\frac{e^{3/5}}{(1 - e^2)^{3/2}}de. \quad (43)$$

Si l'on calcule des tables de la fonction

$$G(e) = \int_0^e \frac{e^{3/5}}{(1 - e^2)^{3/2}} \mathrm{d}e \qquad (44)$$

la formule (43) permet de calculer le temps nécessaire à une diminution donnée de e. Utilisant la valeur (18) de σ, on obtient *dans le système CGS :*

$$t - t_0 = -\frac{2K^2 s\zeta}{5.2{,}53.10^{11}} [G(e) - G(e_0)]$$

ou, en remplaçant K par sa valeur (42)

$$t - t_0 = \frac{2\ 10^{-11}}{5.2{,}53} q_0^2 (1 + e_0)^2 e_0^{-8/5} s\zeta[G(e_0) - G(e)].$$

Si l'on convient d'exprimer t-t_0 en années et q_0 en unités astronomiques en trouve :

$$(t - t_0)_{\mathrm{ans}} = 1{,}13.10^7 q^2_{0(\mathrm{UA})}(1 + e_0)^2 e_0^{-8/5} s_{(\mathrm{cm})} \zeta[G(e_0) - G(e)] \qquad (45)$$

e diminue toujours au cours du mouvement et l'équation (41) montre que a s'annule avec e. Le temps nécessaire à la particule pour tomber sur le Soleil s'obtient en posant

$$e = 0 \qquad G(e) = 0.$$

L'équation (45) donne alors

$$(t - t_0)_{\mathrm{ans}} = 1{,}13.10^7 q^2_{0(\mathrm{UA})}(1 + e_0)^2 e_0^{-8/5} s_{(\mathrm{cm})} \zeta G(e_0).$$

Wyatt et Whipple donnent pour diverses valeurs de e_0, les valeurs correspondantes de :

$$\frac{t - t_0}{10^7 s \zeta q_0^2}$$

t-t_0 étant exprimé en années, soit :

e_0	$\frac{t - t_0}{10^7 s\zeta q_0^2}$	e_0	$\frac{t - t_0}{10^7 s\zeta q_0^2}$
0,00	0,70	0,60	2,42
0,10	0,86	0,70	3,16
0,20	1,04	0,80	4,42
0,30	1,27	0,90	7,29
0,40	1,55	0,99	28,89
0,50	1,92		

Considérons une particule telle que :

$$s = 1 \text{ cm} \qquad \zeta = 4$$

décrivant initialement une orbite *circulaire* de rayon

$$q_0 = a_0 = 1_{\mathrm{UA}}$$

Alors

$$s.\zeta q_0^2 = 4 \qquad \frac{t - t_0}{10^7 s\zeta q_0^2} = 0{,}7 \text{ (voir tableau)}$$

$$t - t_0 = 2{,}8\ 10^7 \text{ ans.}$$

Considérons maintenant la même particule décrivant une orbite originelle de demi-grand axe égal à une unité astronomique, mais d'excentricité 0,7 ; le tableau donne :

$$\frac{t - t_0}{10^7.s\zeta q_0^2} = 3{,}16.$$

Mais :

$$q_0 = a_0(1 - e_0) = 0{,}3 \qquad s.\zeta q_0^2 = 0{,}36$$

$$t - t_0 = 3{,}16.0{,}36.10^7 = 1{,}1.10^7 \text{ ans.}$$

Ainsi, le temps de chute a diminué lorsque, conservant la même valeur du demi-grand axe, nous avons augmenté l'excentricité. Si nous avions attribué à la particule, dans les deux cas le rayon

$$s = 10^{-2} \text{ centimètre,}$$

nous aurions trouvé respectivement pour durée de la chute sur le Soleil :

$$2{,}8.10^5 \text{ ans} \qquad 1{,}1.10^5 \text{ ans.}$$

5. — **L'effet Poynting-Robertson et l'Astronomie météorique** — Wyatt et Whipple [7] ont calculé la durée de chute sur le Soleil des particules qui constituent les principaux courant météoriques. Les valeurs utilisées de q_0 et e_0 sont celles des comètes génératrices. Ils trouvent :

Courant	Comète génératrice	Durée de la chute sur le Soleil (années)
—	—	—
Géminides		0,143 $s\zeta.10^7$
Taurides	Encke	0,605 $s\zeta.10^7$
Bielides	1852 III	2,79 $s\zeta.10^7$
Giacobinides	1933 III	3,32 $s\zeta.10^7$
Orionides	Halley	5,10 $s\zeta.10^7$
Léonides	1866 I	7,24 $s\zeta.10^7$
Perséides	1862 III	12,2 $s\zeta.10^7$
Lyrides	1861 I	18,6 $s\zeta.10^7$

D'après ces résultats une météorite de densité 4 et de rayon 0,04 cm (pouvant donner naissance à un météore de 5e magnitude) se mouvant sur l'orbite de la comète de Halley, tomberait en spirale sur le Soleil en dix millions d'années. Toutefois les nombreuses perturbations auxquelles sont soumises les météorites de la part des planètes peuvent modifier notablement leurs éléments dans un délai beaucoup plus court.

Revenons à la variation de a et e en fonction du temps. L'équation (45) s'écrit :

$$G(e) = G(e_0) - \frac{e_0^{8/5}}{1{,}13\ q^2_{0(\mathrm{UA})}(1 + e_0)^2} \cdot \frac{(t - t_0)_{\mathrm{ans.}}}{s_{\mathrm{cm}}\ \zeta.10^7}$$

et permet en utilisant la table de $G(e)$ de calculer e pour chaque valeur de

$$\Theta = \frac{t - t_0}{s\ \zeta\ 10^7}$$

a se déduit ensuite des équations (41) et (42). Effectuant les calculs pour divers courants, Wyatt et Whipple trouvent une décroissance presque linéaire de a jusqu'à ce que cette quantité atteigne une valeur voisine d'une unité astronomique puis une décroissance plus rapide ensuite. Par contre, la distance périhélie q varie peu. Les courbes de la figure 3 représentent ces résultats pour les Léonides (a_L q_L) et pour les géminides (a_G, q_G). Par ailleurs les formules (38)

montrent que les variations de a et e et par suite de q sont proportionnelles à σ, donc inversement proportionnelles à s et ζ d'après (18). Il en résulte qu'au bout d'un temps suffisamment long, alors que la distance

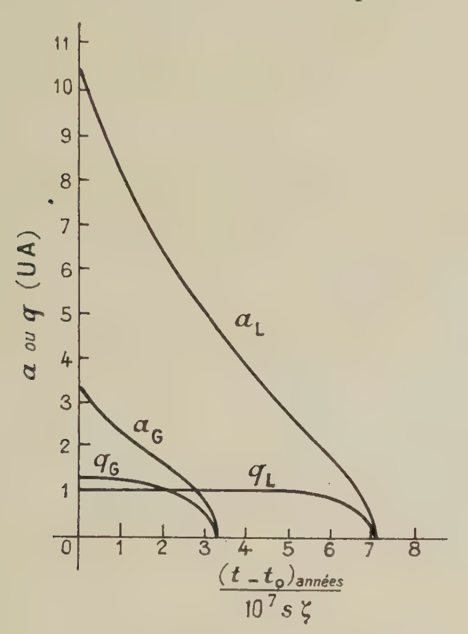


Fig. 3.

périhélie aura peu varié pour toutes les particules le demi-grand axe aura diminué davantage pour les petites particules que pour les grosses. Il tend à s'établir la disposition indiquée par la figure 4. Lors de la tra-

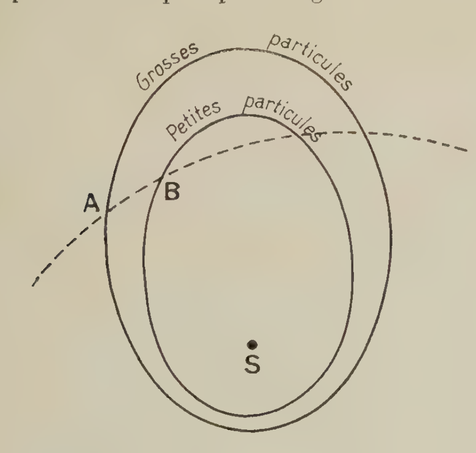


Fig. 4.

versée par la Terre d'une partie du courant (suivant AB), on rencontrera d'abord de grosses particules, ensuite de plus petites. Il y aura, en général, une corrélation entre le temps écoulé depuis le début de la traversée du courant et la grosseur, et par suite l'éclat, des météores. Des recherches effectuées dans le but de mettre en évidence un tel phénomène n'ont pas conduit à des résultats probants. Wyatt et Whipple en concluent que les courants météoriques sont d'origine suffisamment récente pour que la séparation des particules n'ait pas eu le temps de se produire. On obtiendrait d'après ces auteurs un effet sensible pour les Géminides si leur âge atteignait 7.10^4 ans et pour les Taurides si leur âge atteignait 5.10^5 ans.

Considérant les météores sporadiques, Wyatt et Whipple examinent l'hypothèse d'après laquelle une partie de ces corps proviendrait d'une planète gravitant entre Mars et Jupiter (à une distance du Soleil de 3 unités astronomiques environ) et qui aurait éclaté. On peut calculer le temps nécessaire à la chute des fragments sur le Soleil en attribuant à leurs orbites des demi-grands axes inférieurs à celui de l'orbite de Jupiter, et ceci pour diverses valeurs de l'excentricité e_0. La densité des particules est supposée de 4 grammes par centimètre cube. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Temps de chute pour des particules astéroidales

a_0 (UA)	e_0	q_0	q'_0 (distance aphélie)	t (années)	
5	0	5	5	70.10^7 s	(s en cm)
3	0	3	3	25.10^7 s	
4	0,25	3	5	11.10^7 s	
2	0,50	1	3	2.10^7 s	
3	0,67	1	5	3.10^7 s	

Considérons des particules de 4 centimètres de rayon. Dans le cas où la chute est la plus lente, ils seront tombés sur le soleil Soleil en

$$70.10^7.4 = 2,8\ 10^9 \text{ ans}$$

et des particules plus petites tomberaient en un temps moindre. Si, donc, on fait remonter la rupture de la planète à 3.10^9 ans, on ne peut expliquer par cette hypothèse que l'existence de météores très lumineux. Si l'on suppose avec Bauer [7] une rupture remontant à 60 millions d'années, la table précédente montre que les particules de rayon moindre que :

$$8,5\ 10^{-2} \text{ centimètre}$$

seraient déjà tombées sur le Soleil. En effet, dans les conditions de chute les plus lentes, une particule qui tombe sur le Soleil en 6.10^7 ans a un rayon donné par l'équation :

$$6.10^7 = 70.10^7.s$$

$$s = 8,5.10^{-2} \text{ cm.}$$

Les auteurs, considérant qu'un météorite de 5.10^{-2} cm de rayon cause un météore de cinquième magnitude environ, en concluent que seuls les météores de luminosité supérieure à la cinquième magnitude peuvent provenir d'une planète éclatée.

L'effet Poynting-Robertson provoque la chute en spirale sur le Soleil des particules qui constituent la couronne F et le nuage causant la lumière zodiacale. Il en résulte la nécessité d'un apport extérieur de particules si le nuage doit se maintenir. Avec les hypothèses admises sur l'absorption intégrale du rayonnement incident et en admettant une rémission intégrale ultérieure, connaissant en outre le rayonnement énergétique du Soleil, il est possible de calculer la quantité totale d'énergie rayonnée au cours de sa chute par une

particule de masse m. On en déduit l'énergie rayonnée par unité de temps. D'autre part le rayonnement global de la lumière zodiacale et de la couronne F se monte à 3.10^{-7} de la quantité d'énergie rayonnée par le Soleil. On peut en déduire [5] l'apport nécessaire au maintien du nuage dans son éclat actuel, soit :

une tonne par seconde.

Ce résultat a été obtenu en tenant compte uniquement du rayonnement électro-magnétique du Soleil. Si l'on tient compte de l'effet Poynting-Robertson dû au rayonnement corpusculaire et aussi de la diminution de masse des particules correspondant aux atomes arrachés par les corpuscules incidents (ions et atomes d'hydrogène) on trouve que la quantité de matière à fournir au nuage pour assurer son maintien est fortement augmentée ; mais les connaissances actuelles sur le rayonnement corpusculaire du Soleil ne permettent pas d'en tenir compte d'une manière sûre.

D'après Whipple il faut rechercher l'origine de cet apport dans les éjections nucléaires des comètes. Ses recherches sur la quantité de matière émise par un noyau comètaire d'une part, et les statistiques sur le nombre des comètes d'autre part l'ont conduit à évaluer à trente tonnes par seconde la quantité totale de matière émise par les comètes sous forme de particules et à cent tonnes par seconde leur émission gazeuse. Les particules chassées des noyaux cométaires décrivent des orbites peu différentes de celles des comètes parentes. Elles tombent ensuite en spirale sur le Soleil, mais subissent au cours de cette chute des influences qui peuvent les arrêter ou les détruire. Ce sont :

1° les perturbations des planètes, en particulier de Jupiter qui tendent à communiquer aux particules une distance aphélie voisine de la distance moyenne de cette planète,

2° La possibilité de rencontres destructrices entre particules,

3° L'existence possible d'un courant de matière (atomes surtout d'hydrogène) qui traverserait le Système Solaire.

Whipple analyse ces influences et conclut qu'une partie notable des particules peut atteindre les régions voisines du Soleil (c'est-à-dire les régions situées à moins de 1,66 unité astronomique de cet astre). Les résultats conduisent en outre à une prédominance des mouvements directs sur les mouvements rétrogrades et à une répartition des rayons des particules qui montre une brusque chute de fréquence pour des rayons supérieurs à 10^{-2} centimètre. Il y a sur ce point accord avec les résultats de Van de Hulst d'après lesquels les particules du nuage zodiacal montrent une chute de fréquence pour des rayons supérieurs à 0,035 centimètre.

L'effet Poynting-Robertson permettra peut-être de résoudre une difficulté qui a surgi à propos de la densité μ du nuage zodiacal au voisinage de l'orbite terrestre. Utilisant les mesures de luminosité de la lumière zodiacale et de la couronne F et moyennant certaines hypothèses sur la fonction de fréquence des rayons des particules divers auteurs sont parvenus aux résultats suivants :

Allen (1946)	$\mu = 4.10^{-23}$ g/cm³
Fessenkov (1947)	$\mu = 6.10^{-23}$ g/cm³
Van de Hulst (1947)	$\mu = 3.10^{-21}$ g/cm³
Behr et Siedentopf (1953)	$\mu = 10^{-23}$ g/cm³

Le travail de Van de Hulst a été critiqué par Lévine [8] qui lui reproche d'avoir attribué aux particules un albédo « incroyablement faible » ($\leqslant$ 0,005) et d'avoir utilisé une représentation de la brillance de la lumière zodiacale en fonction de l'élongation du Soleil qui est hypothétique puisqu'elle résulte d'une interpolation entre des observations intéressant de petites élongations moindres que cinq degrés (Baumbach et Grotrian) et des observations concernant des élongations supérieures à trente degrés (Hoffmeister, Elvey et Roach). En outre les travaux de Van de Hulst sont fondés sur la réflexion et la diffusion de la lumière par des particules alors que ceux de Behr et Siedentopf ont mis en évidence le rôle fondamental joué par les électrons dans la partie interne du nuage zodiacal (à moins de 0,6 unité astronomique).

La densité de la matière au voisinage de l'orbite terrestre peut aussi se déduire des comptages de météores, de la théorie de leur luminosité, et de la répartition de leurs vitesses géocentriques. On trouve :

$$\mu = 10^{-23} \text{ g/cm}^3$$

en accord avec les résultats de Fessenkov, Allen, Behr et Siedentopf [8].

Le résultat discordant de Van de Hulst trouve cependans une confirmation dans la détermination de la masse de matière reçue par la Terre, détermination fondée sur l'étude des limons océaniques. Déjà, en 1876 Murray et Renard [9] avaient signalé des sphérules magnétiques de 0,3 millimètres environ de diamètre qui avaient été draguées au fond des mers. Ces sphérules consistaient, comme les fers météoriques en fer allié au nickel et au cobalt. De nombreuses » carottes « de sédiments ont été prélevées ces dernières années dans diverses mers profondes. Les échantillons soumis à un puissant extracteur magnétique ont donné un nombre de sphérules dix fois plus grand qu'il n'avait été signalé par Murray et Renard. Mais il y a mieux : en déterminant la teneur en nickel de ces sédiments et en admettant que ce nickel est d'origine cosmique, utilisant d'autre part la proportion de nickel contenue dans les météorites, Petterson et Rotchi en ont déduit la quantité de fer météorique tombant sur la Terre. La proportion des fers parmi les météorites étant connue, ces auteurs peuvent évaluer à 4 000 à 5 000 tonnes la quantité totale de matière météorique tombant chaque jour sur la Terre. La collecte de férules magnétiques sur les montagnes et dans les régions polaires conduit à des résultats de même ordre. On en déduit une valeur de la densité de matière au voisinage de la Terre

$$\mu = 10^{-20} \text{ gramme par centimètre-cube.}$$

Ainsi, même si l'on prend en considération les remarques de Levine au sujet du travail de Van de Hulst, il semble que la densité de la matière au voisinage de l'orbite terrestre soit mille fois plus grande que ne le font prévoir les comptages de météores L'explication de ce résultat peut se déduire des idée

actuelles sur les orbites des corps météoriques. D'après Öpik [10] une partie très importante de ces corps, peut-être 90 % décrivent autour du Soleil des trajectoires peu excentriques et de faible inclinaison ; une partie beaucoup moins importante se meut sur des orbites de grande excentricité et provient de la désingrégation des comètes ; enfin une faible partie serait hyperbolique. Parmi les corps du premier groupe dont les vitesses par rapport à la Terre sont relativement faibles, un grand nombre ne pourraient de ce fait donner un météore lumineux, surtout les plus petits de diamètre voisin de dix microns (micrométéorites). Ces très petits corps sont fortement influencés par l'effet Poynting-Robertson et tombent en réalité en spirale sur le Soleil. De Jager [11] a montré qu'un grand nombre d'entre eux doivent être captés au passage par la Terre. Soit un nuage de particules tournant autour du Soleil sur des orbites circulaires avec des périodes de révolution obéissant à la 3e loi de Kepler. Les vitesses de ces corps (et celle de la Terre) décroissent quand la distance du Soleil augmente, ceux qui sont plus éloignés du Soleil que la Terre ont une vitesse moindre que celle-ci, ceux qui sont plus rapprochés une vitesse plus grande. De Jager montre que les particules qui passent à une distance de notre planète moindre que

$$4{,}5\ 10^6 \text{ kilomètres}$$

décrivent par rapport à celle-ci des ellipses et deviennent des satellites de la Terre. Mais à ce moment (*fig.* 5) l'effet Poynting-Robertson introduit une force f constamment opposée à la vitesse *héliocentrique* de la particule P, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction du Soleil. Cette force tend à augmenter continuellement l'excentricité de l'orbite *par rapport à la Terre*, et cette orbite s'allongeant de plus en plus finit par rencontrer la surface de notre planète. Ainsi, toute particule captée est destinée à tomber sur la Terre. L'effet Poynting-Robertson joue ici un rôle double :

1° Il fait tomber les particules en spirale sur le Soleil et les amène ainsi à passer à moins de $4.5.10^6$ kilomètres de la Terre ce qui entraîne leur capture.

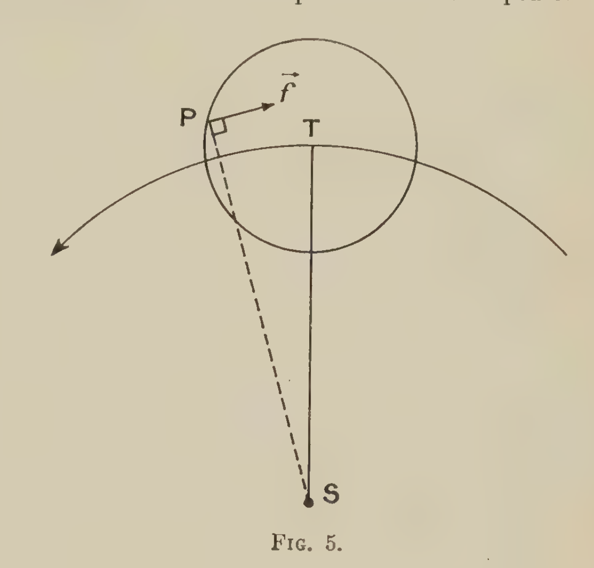


Fig. 5.

2° Au cours de leur mouvement autour de la Terre il allonge leur orbite jusqu'à amener une rencontre avec la surface de notre planète.

Ces particules animées de vitesses géocentriques trop faibles pour donner naissance à des météores lumineux et d'ailleurs trop petites augmentent cependant la quantité de matière météorique reçue par la Terre.

Manuscrit reçu le 10 novembre 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Robertson (H. P.), Dynamical effects of radiation in the Solar System, Monthly Notices of the *Roy. Astronom. Soc.*, 1937, **97**, 423.

[2] Cf. Von Laue (M.), La Théorie de la Relativité, traduit par G. Létang, Paris, Gauthier-Villars, 1922, **1**, 128.

[3] Lichnerowicz (A.), Éléments de Calcul Tensoriel, Paris, Coll. A. Colin, 1950, 174.

[4] Chazy (J.), La Théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste, Paris, Gauthier-Villars, 1928, I, 101.

[5] Whipple (F. L.), A comet model III. The zodiacal light. *Astrophs. J.*, 1955, **121**, n° 3, 750 ou Harvard Reprint 413.

[6] Fessenkov (V. G.), La radiation corpusculaire comme facteur de l'évolution du Soleil et des étoiles. Communications de l'U. R. S. S. à l'Assemblée Générale de l'Union Astronomique Internationale, Rome, 1952.

[7] Wyatt (S. P.) et Whipple (F. L.), The Poynting-Robertson effect on meteor orbits. *Astrophys. J.*, 1950, **111**, 134.

[8] Levine (B. J.), Densité spatiale des particules interplanétaires et distribution selon leurs dimensions. Colloque : « Les particules solides dans les astres », Institut d'Astrophysique, Liège, 1955, 114.

[9] Bosler (J.), *Astrophysique*, Paris, Hermann, 1928, 474.

[10] Opik (E.), Results of the Arizona expedition for the study of meteors. *Irish Astronom. J.*, 1956, **4**, n° 2, 49.

[11] De Jager (C.), The capture of zodiacal dust by the earth. Colloque : « Les particules dans les astres », Liège, 1955, 174.

LETTRES A LA RÉDACTION

STRUCTURE ET POUVOIR RÉFLECTEUR DES COUCHES DE SILICIUM OBTENUES PAR ÉVAPORATION SOUS VIDE

Par Mme Sonja ROBIN-KANDARE et M. H. DAMANY,
Laboratoire des Hautes Pressions,
et Mme L. TERTIAN,
Laboratoire des Rayons X, C. N. R. S., Bellevue.

Le silicium présente dans l'ultra-violet lointain un très bon pouvoir réflecteur et il nous a paru nécessaire de compléter nos expériences préliminaires [1] par l'étude de couches préparées dans des conditions sensiblement améliorées.

I. Préparation des couches. — Toutes les couches ont été préparées dans un vide dynamique d'environ 3.10^{-6} mm de mercure, créé par une pompe à diffusion d'huile de grand débit. Nous avons utilisé trois méthodes d'évaporation thermique : *a*) Emploi d'une gouttière de tantale chauffée par passage de courant. *b*) Emploi d'un creuset de graphite bombardé par des électrons. *c*) Emploi d'un canon à électrons [2].

Les deux premières méthodes présentent de gros inconvénients. Pour *a*), le tantale est très fortement attaqué par le silicium : il se forme un alliage qui provoque rapidement la rupture de la gouttière. De plus, les couches ainsi préparées contiennent certainement des traces non négligeables de tantale. Pour *b*), le silicium forme avec le graphite du carbure de silicium et le plus souvent la couche de carbure ne protège pas le graphite d'une attaque ultérieure : le creuset se fendille et ne garde pas le silicium fondu. Aussi est-il difficile d'obtenir des couches épaisses par ce procédé.

La méthode *c*) nous a permis la préparation de couches épaisses, bien adhérentes et très pures car, convenablement appliquée, elle élimine tout problème de support. Le dispositif est le suivant : un morceau d'un monocristal de silicium très pur repose sur un bloc de graphite, en bon contact thermique et électrique avec ce dernier. On bombarde la partie supérieure du cristal avec un faisceau d'électrons fourni par un canon ; le silicium fond partiellement et c'est le reste du cristal qui sert de creuset ; le bloc de graphite joue le rôle de volant thermique et évite la fusion totale du silicium (*fig.* 1).

Nous avons évaporé Si sur trois sortes de supports ; verre, quartz cristallisé, corindon. Le dépôt se faisait sur une face polie plan-optique, soigneusement nettoyée et dégraissée avant introduction dans la cloche, puis soumise à un bombardement ionique de 20 minutes.

L'épaisseur de nos couches n'était pas rigoureusement uniforme, car l'évaporation donne une symétrie semi-circulaire sur une plaque de grandes dimensions ; mais les plaquettes présentaient des dimensions assez faibles et la différence d'épaisseur n'était pas très sensible. Nous avions la possibilité d'améliorer l'uniformité en faisant tourner la plaquette au-dessus de l'évaporateur. L'épaisseur des différentes couches étudiées était comprise entre 3 000 et 15 000 Å (mesurée par interférométrie), les temps d'évaporation variaient de 40 à 90 minutes. Une évaporation aussi longue élève la

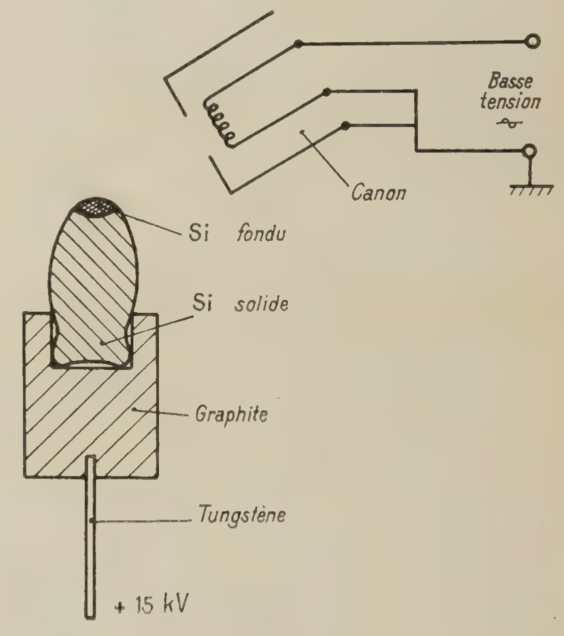


FIG. 1.

température du support jusqu'au voisinage de 100 °C. Pour éviter cet effet, nous avons dans certains cas, fractionné l'évaporation : par exemple, évaporation pendant 10 minutes, puis arrêt pendant 20 minutes, etc.

Nous avons soumis nos couches à trois types de traitement thermique sous vide : I) chauffage pendant l'évaporation ; II) chauffage après l'évaporation sans que la couche soit exposée à l'air ; III) chauffage sous vide après exposition à l'air.

I et II sont obtenus par contact du support avec un ruban de tantale dont la température est indiquée par un thermocouple chromel-alumel. Pour III, nous utilisions un four constitué par un bloc d'acier dans lequel est incorporé un enroulement de tungstène, et la température est indiquée par un thermocouple chromel-alumel fixé sur le bloc.

Les couches d'épaisseur non uniforme ont présenté souvent une surface craquelée (*fig.* 2, A) ; ces craquelures, déjà amorcées avant chauffage, s'accentuant

sous l'effet de celui-ci. Il semble que ce phénomène de fracture n'intéresse que les couches de forte épaisseur et soit lié à l'existence de tensions dans les couches [3].



FIG. 2.

Il n'affecte pas l'adhérence car il n'y a pas pelliculage ; de plus après dissolution de la couche, on constate que le quartz ou le verre sous-jacent est lui-même craquelé sur une faible profondeur (*fig.* 2, B).

II. **Structure des couches.** — On sait que les couches évaporées sur support non chauffé sont amorphes. Nous avons examiné, par diffraction électronique en réflexion, l'influence sur la structure des trois types de traitement thermique que nous venons de décrire. Remarquons tout de suite que ce que l'on observe par cette méthode est la structure d'une tranche superficielle de quelques dizaines d'angströms seulement, et que l'on n'obtient pas ainsi directement des renseignements sur l'intérieur de la couche. Le traitement thermique I, effectué à plus de 600 °C donne des couches cristallisées, avec légère orientation des cristallites : axe [110] perpendiculaire au plan du support ; les couches présentaient alors sous certaines angles un aspect laiteux. Le traitement thermique II effectué à 700 °C environ, donne un début très net de cristallisation et il est très vraisemblable qu'avec une température un peu plus élevée, on observerait une cristallisation complète. Par contre le traitement III, effectué à différentes températures entre 720 et 780 °C pendant au moins deux heures, ne donne pas de cristallisation. Nous avons alors porté la température à 970 °C pendant deux heures trente, toujours sans résultat ; on constate seulement une diminution de l'épaisseur par réévaporation. Ces dernières expériences semblent en contradiction avec les résultats de différents auteurs [4], [5] mais un nouvel examen par diffraction en réflexion, après un décapage chimique qui enlève une partie importante de la couche, révèle que l'intérieur de la couche est effectivement cristallisé. Remarquons que les auteurs cités examinaient par transmission des couches relativement minces et sans support.

III. **Pouvoir réflecteur dans l'ultra-violet proche et lointain.** — Les mesures du pouvoir réflecteur ont été effectuées dans un monochromateur à vide décrit par ailleurs [6]. Le domaine spectral s'étend de 1 000 à 3 000 Å grâce à l'emploi d'une lampe à hydrogène sans fenêtre. Une étude préliminaire [1] sur des couches minces de silicium évaporées à partir d'un ruban de Ta dans un vide moyen de quelques 10^{-5} mm de mercure donnait, dans une région spectrale limitée à 1 000-1 600 Å, des résultats en accord avec les mesures présentées ici. Il nous a paru nécessaire de vérifier ces résultats en éliminant l'influence éventuelle des traces de Ta dans les couches. L'emploi du canon à électrons nous l'a permis.

La valeur du pouvoir réflecteur R des couches amorphes dépend beaucoup des conditions d'évaporation, alors que la forme de la courbe $R = f(\lambda)$ reste sensiblement la même. On constate en particulier qu'une évaporation prolongée et continue donne des résultats inférieurs à ceux que l'on obtient par une évaporation intermittente. Les courbes A et B de la figure 3 illustrent la différence entre ceux deux cas.

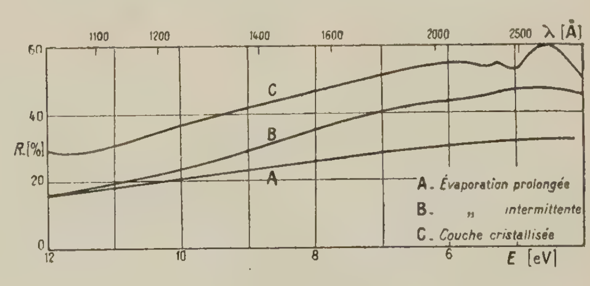


FIG. 3.

La courbe C représente le pouvoir réflecteur d'une couche évaporée sur un support de quartz chauffé à 700 °C pendant l'évaporation ; la couche présentait un aspect laiteux. L'examen par diffraction électronique montre une cristallisation avec orientation préférentielle des cristallites (axe [110] perpendiculaire au plan du support) ; pour pouvoir effectuer la mesure optique, il a fallu procéder à un léger polissage mécanique (alumine sur feutre) qui rend amorphe la partie superficielle (un décapage chimique révèle que l'intérieur de la couche reste cristallisé). Le pouvoir réflecteur des couches cristallisées est plus élevé que celui des couches amorphes et présente deux maxima : l'un faible à 5,3 eV, l'autre plus fort à 4,5 eV. Les discontinuités du pouvoir réflecteur peuvent être reliées à des

transitions électroniques mais il semble difficile dans l'état actuel de la théorie des bandes de donner un calcul quantitatif satisfaisant.

Lettre reçue le 9 février 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kandare (S.) et Fabre (D.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **242**, 1150.
[2] Brochard, Giacomo, Jacquinot et Roisen, *J. Physique Rad.*, 1951, **12**, 632.
[3] Hoffman (R. W.), Daniels (R. D.) et Crittenden (E. C.), *Proc. Phys. Soc.*, 1954, **67** B, 497.
[4] Haas (G.), *Z. Anorg. Chem.*, 1948, **256**, 166.
[5] König (H.), *Optik*, 1948, **3**, 201.
[6] Robin-Salomond (S.), *Thèse*, Paris, 1954 et Fabre (D.), *Diplôme d'Études Supérieures*, Paris, 1956.

VARIATION DE LA RÉSISTIVITÉ DE COUCHES MINCES DE Ge ET Te PAR LA PRESSION

Par Jean Robin,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue (Seine-et-Oise).

On sait que, à température constante, la pression a une influence sur la résistivité intrinsèque de différents corps semi-conducteurs (voir par exemple [1], [2], [3]). Cette influence se traduit surtout par une variation $(\partial E_g/\partial P)_T$ de la largeur E_g de la bande interdite avec la pression. La plupart des travaux effectués jusqu'à maintenant dans ce domaine portent soit sur des poudres, soit surtout sur des échantillons massifs monocristallins.

Le présent travail rapporte quelques résultats préliminaires que nous avons obtenus en soumettant des couches minces de germanium et de tellure à une pression de gaz neutre. Pour cela nous avons construit un récipient résistant à la pression et possédant une embase, représentée figure 1, comportant 12 entrées de courant de type conique. L'isolement par du téflon de ces entrées, représenté en figure 2, varie de 10^{11} Ω jusqu'à plus de 5.10^{15} Ω (limite des mesures possibles avec l'Iso-R-mètre Lemouzy utilisé).

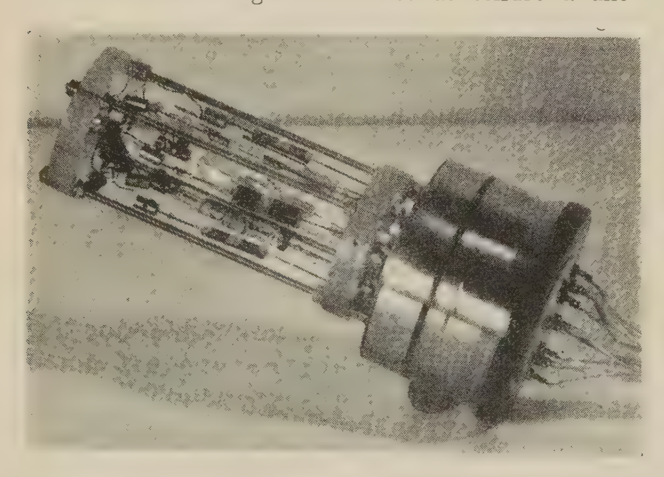


Fig. 1.

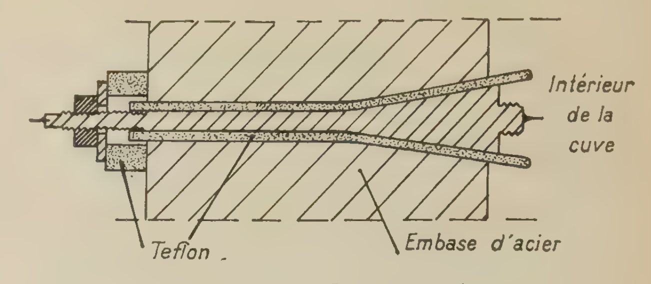


Fig. 2.

Nous avons opéré sur des couches minces évaporées assez rapidement sous vide sur des supports de verre à extrémités métallisées. Les épaisseurs des couches ont été déterminées par méthode interférentielle. Il ne semble pas que, jusqu'à maintenant, des travaux de ce genre aient fait l'objet de publications importantes.

a) **Germanium.** — Nous avons utilisé du germanium « spectroscopiquement pur » dont la résistivité ρ était de 30 Ω cm. On trouve que la résistivité des couches évaporées est de 3 à 5.10^4 Ω.cm. Or, pour des couches de germanium amorphe on devrait s'attendre [4] à une résistivité beaucoup plus grande (de l'ordre de 10^8 à 10^{11} Ω.cm). On peut donc penser que la structure de nos couches pourrait être très microcristalline. L'épaisseur des couches varie entre 1 100 et 1 600 Å. Nous avons mesuré la résistance de ces couches jusqu'à 2 000 kg/cm² à 18 °C. La figure 3 représente $\log_{10} \rho$ en fonction de la pression. La courbe en trait plein correspond aux montées en pression et celle en pointillé aux pressions décroissantes. Les deux branches de courbe

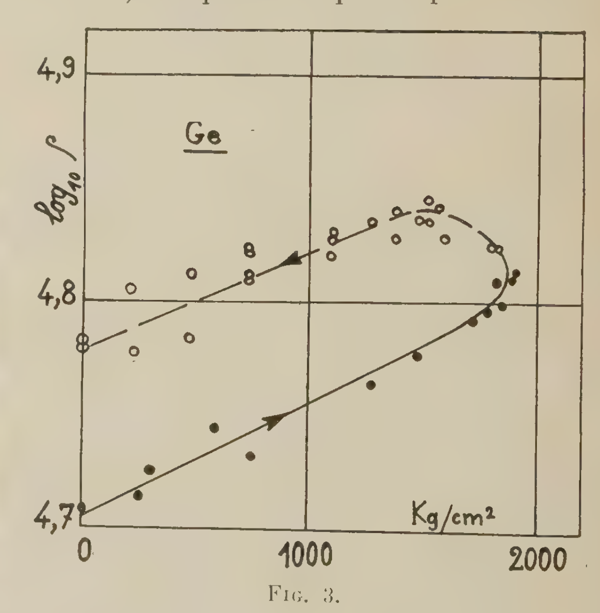


Fig. 3.

sont parallèles ; $\log_{10} \rho$ croît linéairement avec la pression. A partir de ces valeurs de $\log_{10} \rho$ on calcule que :

$$(\partial E_g / \partial P)_T = 8.10^{-6}\ \mathrm{eV.cm^2/kg}.$$

La résistance de la couche après mise sous pression est environ 5 % plus élevée qu'elle ne l'était avant, probablement par suite d'une légère modification de structure.

Les valeurs de $(\partial E_g / \partial P)_T$ obtenues sur des échantillons monocristallins, généralement du type n (voir par exemple [3], [5], [6]) sont de l'ordre de 5,5 10^{-6} ce qui est de même signe et du même ordre de grandeur que les valeurs que nous obtenons.

b) **Tellure.** — Le tellure utilisé était également de qualité « spectroscopiquement pure » et était de plus purifié au Laboratoire par distillations sous vide. Les couches de tellure étaient cristallisées et leurs épaisseurs variables de 400 à 1 200 Å. La résistivité de ces couches variait entre 0,112 et 0,120 Ω.cm.

Les mesures ont, comme pour le germanium, été

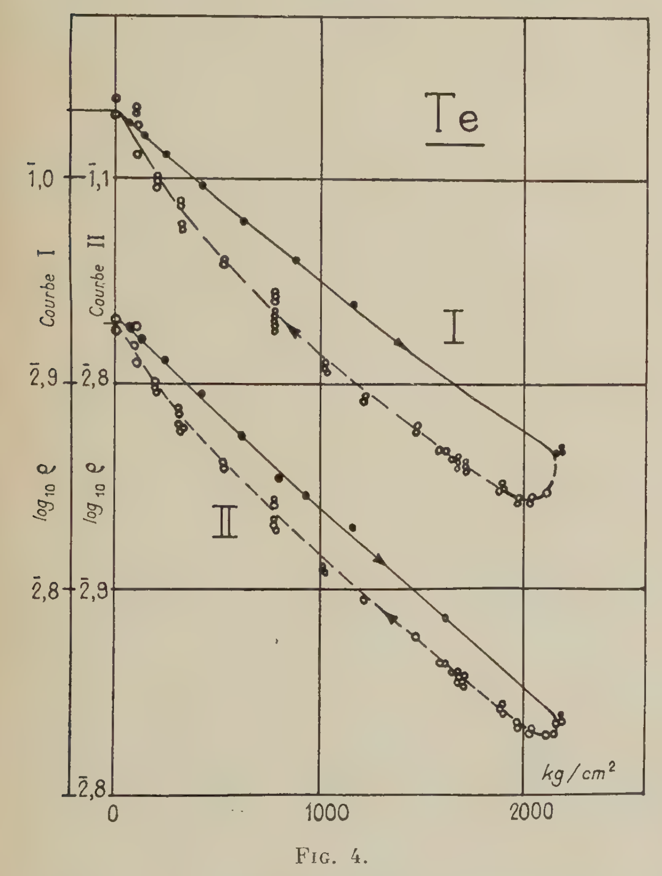


Fig. 4.

faites jusqu'à 2 000 kg/cm² et ramenées à 18 °C par correction de l'effet de température. La figure 4 donne, pour une seule montée en pression, $\log_{10} \rho$ en fonction de P pour deux des échantillons étudiés ; plusieurs mesures effectuées à même pression et température montrent que ρ varie légèrement avec le temps, avec tendance à une diminution de l'hystérésis. Les résultats obtenus sont les mêmes et leur reproductibilité est également très bonne pour plusieurs montées et descentes en pression. Chaque montée en pression (courbe en trait plein) s'effectue en une journée et chaque descente (en pointillé) en une quinzaine de jours. Étant donné la légère évolution de ρ avec le temps, les courbes en pointillé sont certainement plus proches de l'état d'équilibre d'adsorption ; on peut même supposer que si les montées et descentes en pression étaient faites en des temps beaucoup plus longs le phénomène d'hystérésis ne serait plus décelable.

On constate que la courbe donnant $\log_{10} \rho$ décroît lorsque la pression augmente et présente une légère concavité vers le haut.

De nos courbes expérimentales il résulte que la valeur moyenne de $(\partial E_g / \partial P)_T$ entre 1 et 2 000 kg/cm² est :

$$(\partial E_g / \partial P)_T \simeq -11.10^{-6}\ \mathrm{eV.cm^2/kg}.$$

Ce coefficient serait un peu plus faible vers les hautes pressions et un peu plus fort vers les faibles pressions.

Les valeurs trouvées avec des échantillons monocristallins taillés soit parallèlement, soit perpendiculairement à l'axe C sont respectivement de l'ordre de -19.10^{-6} et -15.10^{-6} eV.cm²/kg (voir par exemple [7] et [8]).

Les variations de la largeur de la bande interdite E_g du germanium et du tellure obtenues par nos travaux sur des couches minces polycristallines (et même très microcristallines) se rapprochent beaucoup de celles obtenues par les auteurs antérieurs sur des échantillons massifs monocristallins. Évidemment l'influence du support, tant par sa nature que sa compressibilité et l'adhésion de la couche sur lui n'est pas connue et il ne peut en être tenu compte dans ce travail préliminaire. Il en est de même pour la variation avec la pression des barrières de potentiel entre les microcristaux.

Cependant ces résultats sont suffisamment encourageants pour qu'on puisse espérer, avec des couches plus parfaites, et notamment monocristallines, pouvoir tirer des conclusions plus solides à partir de mesures de résistivité sous pression, en particulier sur les propriétés de surface des semi-conducteurs et leur évolution, qui sont difficiles à obtenir par des études effectuées sur des monocristaux massifs.

Lettre reçue le 9 février 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Shockley (W.), Electrons and Holes in Semiconductors, New York, 1950.
[2] Seitz (F.) et Turnbull (D.), *Solid State Physics*, (1), New York, 1955.
[3] Paul (W.) and Brooks (H.), *Phys. Rev.*, 1954, **94**, 1128.
[4] Dunlap (W.), An Introduction to Semiconductors, New York, 1957.
[5] Bridgman (P. W.), *Proc. Amer. Acad. Arts Sc.*, 1953, **82**, 71.
[6] Miller (P.) and Taylor (J.), *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 179.
[7] Neuringer (L.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 1193.
[8] Long (D.), *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1256.

COEFFICIENT DE CONVERSION INTERNE DU RAYONNEMENT DE 92 keV DU ^{234}Pa

Par R. Foucher,
Laboratoires de Physique Nucléaire d'Orsay (Seine-et-Oise).

La mise en évidence d'effets de la structure nucléaire sur les coefficients de conversion interne [1], [2] peut être favorisée dans les noyaux lourds impair-impair déformés possédant des rayonnements M_1 interdits

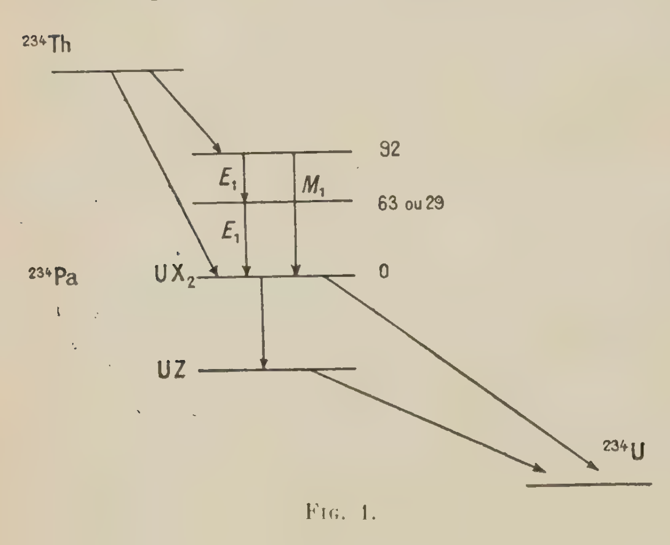


Fig. 1.

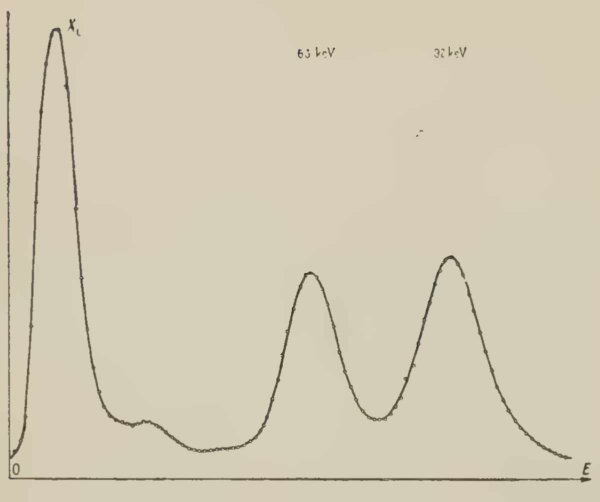


Fig. 2.

dont l'énergie est inférieure à 150 keV pour lesquels un mélange $M_1 + E_2$ ne peut expliquer une conversion trop faible.

Dans cette optique, nous avons repris en spectrométrie γ l'étude du ^{234}Pa (UX_2). Les premières estimations du coefficient β_1^L de conversion L apparaissent effectivement faibles par rapport aux prévisions de Sliv et Rose [3].

Du schéma de désintégration de l'UX_1 (*fig.* 1) est tirée l'équation (1) donnant β_1^L en fonction du nombre de photons X_L, 63 keV, 92 keV émis dans l'angle solide utilisé et déduits de l'analyse du spectre (*fig.* 2)

$$\beta_1^L(92) = \frac{1}{\omega_L(M_1)} \frac{N(X_L)}{N(92)} - \frac{\omega_L(E_1)}{\omega_L(M_1)} \cdot \frac{N(63)}{N(92)} \left[\alpha_L(63) + \frac{\alpha_L\, 29}{1 + \alpha(29)} [1 + \alpha(63)]\right] \quad (1)$$

$\alpha_L(29)$, $\alpha(29)$, $\alpha_L(63)$, $\alpha(63)$ sont les coefficients de conversion L et $L + M + \dots$ des rayonnements électriques de 29 et 63 keV [4], [5], [6], [7] : ω (M_1), ω (E_1) sont les coefficients de fluorescence globaux des couches L excités par conversion interne M_1 et E_1. Il faudra évidemment déduire du spectre figure 2, les photons X_L, X_k, Compton, de freinage, de la transition UX_2-^{234}U.

Conditions expérimentales. — Les sources de 1 à 6 μC ont été extraites d'un minerai nouvellement traité par MM. Muxart et Conte, de l'Institut du Radium. Les détecteurs γ sont des cristaux de INa(Tl) dont l'un a 35 mm de diamètre, 7 mm de hauteur et est recouvert d'une feuille d'aluminium de 20 μ rendue diffusante par 500 μg/cm^2 de magnésie. Les photomultiplicateurs dont des EMI 5914 — les analyseurs et circuits de coïncidences seront publiés par ailleurs. Nous avons utilisé également un analyseur RIDL à 256 canaux et un analyseur 100 canaux du même type ; afin d'éviter les additions X_L-63 les angles solides sont de 2 à 5 %. Pour arrêter les β de 2 MeV de l'UX_2 des écrans de 5 ou 7 mm de béryllium sont interposés.

Étalonnage du spectre. Corrections. — L'étalonnage en énergie a été réalisé avec des raies de 18 ; 22 ; 24 ; 34 ; 47 ; 88,5 ; 140 keV. Les largeurs à mi-hauteur de ces raies suivent très bien la relation :

$$L_{1/2}^2 = c + \frac{b}{E} \text{ avec } L = 15{,}5\ \% \text{ pour } E = 88{,}5 \text{ keV.}$$

Les largeurs relatives des raies complexes X_L du Ra D et ^{234}Pa s'écartent très nettement de cette relation. Leur forme a été déterminée avec précision ; elle est donnée par l'addition des raies $L\alpha$, $L\beta$, $L\gamma$ de fluorescence L. En admettant qu'elle est formée pour l'essentiel de 50 % de photon d'énergie 13 keV et 50 % d'énergie 17 keV, on peut calculer l'absorption dans les écrans. Pour le béryllium on trouve $a = \frac{I_0}{I} = 1{,}50$, l'expérience donne 1,54. Le pourcentage des raies $L\alpha$, $L\beta$, $L\gamma$ a été pris d'après les résultats de Hoff-Olsen-Mann sur les X_L émis lors de la capture L du ^{235}Np [8], En tenant compte des autres facteurs d'absorption, d'efficacité, d'addition X_L-63 on trouve :

$$a(X_L) = 1{,}72 \qquad a(63) = 1{,}22 \qquad a(92) = 1{,}27.$$

L'absorption dans la source qui n'était pas totalement dépourvue de matière a été étudiée en mesurant des sources d'intensité et de dimension variées.

Les rapports pic d'échappement/pic photoélectrique ont été déterminés expérimentalement sur les γ de l'UX_1 et celui de 88,5 keV du ^{99}Tc.

$$R(63) = 12 \text{ à } 14\ \% \qquad R(92) = 4 \text{ à } 6\ \%.$$

Enfin les proportions de raies X_L et X_K (^{234}U) contenues dans le spectre ont été déterminées par coïncidences β-spectre et X_L-spectre. Nous trouvons $N(X_L) \sim N(X_L) \sim 15$ % du 92 keV. On voit sur l'équation 1 qu'une erreur de 30 % sur ce chiffre fait varier β_1^L de quelques pour cent.

Valeurs de α_L ; ω **utilisées.** — Pour $\alpha_L(29)$, les valeurs 10 ou 11 ont été proposées [4], [6]. Nous avons remesuré ce coefficient en effectuant les coïncidences 63-29 keV, 63-X, nous trouvons $\alpha_L \sim 60$. Nous reviendrons ailleurs sur cette divergence qui fait peu varier le rapport

$$\frac{\alpha_L(29)}{1 + \alpha(29)} = 0{,}95 \pm 0{,}05.$$

Pour $\alpha_L(63)$ les mêmes auteurs trouvent 0,45 et 0,42 ; notre mesure qui peut également être surestimée donne 0,39 (pour $\alpha_L = 0{,}46$). Nous prendrons donc la valeur théorique de Rose et Sliv pour un E_1 pur : $\alpha_L = 0{,}31$ — alors $\alpha(63)$ sera voisin de 0,40. Enfin pour ω, qui est la grandeur la plus importante, nous prendrons une limite inférieure. D'après les valeurs de Kinsey [9] qui ne sont pas en contradiction avec les résultats expérimentaux récents [10], on aurait $\omega_L = 0{,}41$ pour une excitation M_1, $\omega_L = 0{,}46$ pour une excitation E_1 ; en prenant

$$\omega_L(E_1) = \omega_L(M_1) = 0{,}40$$

nous sommes certains de ne pas minorer β_1^L.

Analyse du spectre. — Les formes des raies X_L, 63, 92 keV sont bien établies. L'imprécision de l'analyse provient de l'évaluation du fond continu. Une mesure effectuée en arrêtant les rayonnements directs d'énergie inférieure à 100 keV donne une limite inférieure. La connaissance de la forme et de la largeur à mi-hauteur des raies permet d'évaluer un maximum de ce fond. Dans ces conditions pour 5 mesures nous obtenons pour le premier terme de l'équation (1) les valeurs limites 3,85 et 4,20, pour le deuxième terme 1,36 et 1,53, donc :

$$2{,}3 < \beta_1^L < 2{,}9.$$

Étant donné les valeurs prises pour ω_L, le sens des corrections, et comme nous ne trouvons pas de déficit de photons X dans les mesures parallèles de $\alpha(29)$ et $\alpha(63)$ [11] au contraire — la valeur maximum obtenue nous semble être bien une limite. Ce résultat n'est pas en contradiction avec les estimations antérieures qui sont de l'ordre ou inférieures à 2, [4], [6], [7]. Une détermination plus directe de β_1^L est évidemment souhaitable. Une mesure du rapport $L_I/L_{II}/L_{III}$ est actuellement en cours.

Comparaison avec les résultats théoriques

	Rose	Sliv	Exp.
	—	—	—
β_1^L	4,7	4,2	2,3 à 2,9

Ainsi, le coefficient de conversion expérimental de cette transition M_1 interdite du noyau impair-impair déformé ^{234}Pa serait nettement inférieur aux valeurs théoriques, ce qui indiquerait un important effet de la structure nucléaire sur ce coefficient de conversion.

Lettre reçue le 25 février 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Sliv, Coefficient de conversion interne 1956-1958, Moscou, Leningrad.
[2] Church et Weneser, *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 1382.
[3] Rose, Internal conversion coefficient (North Holland Publ. Co, 1958).
[4] Johanson, *Phys. Rev.*, 1954, **96**, 1075.
[5] Stoker et al., *Physica*, 1954, **19**, 433.
[6] Vartapétian et Dick, *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **242**, 1602. Vartapétian, *Annales Physique*, 1958.
[7] Ong, *Thèse*, 1956.
[8] Hoff-Olsen-Mann, *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 805.
[9] Kinsey, *Canadian J. Research*, 1948, **26** A, 404.
[10] Lazar (N. H.) et Lyon (W. S.), Oak Ridge Radiation National Laboratory, 1958, 2430.
[11] Foucher, *C. R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 1800.

ANALYSE PAR SPECTROCHIMIE D'ÉMISSION DANS L'ULTRAVIOLET LOINTAIN DE POUDRES CONTENANT LES ÉLÉMENTS SUIVANTS : GERMANIUM, ARSENIC, SÉLÉNIUM, BROME, ÉTAIN, ANTIMOINE, TELLURE.

Par Mlle Germaine Balloffet, M. Jacques Romand et M. Boris Vodar,

Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue (Seine-et-Oise).

On a déjà parlé [1] de l'application de l'étincelle glissante dans le vide au dosage de poudres contenant des éléments difficiles à analyser par spectrographie classique. Des dosages du soufre et du phosphore en particulier dans des poudres à base d'alumine ont donné une sensibilité meilleure que dans le cas de l'analyse de ces deux éléments dans les aciers. Il nous a paru intéressant de vérifier que les raies « ultimes » [2] des éléments ayant un nombre d'électrons optiques variant de 4 à 7 sur la 4e et la 5e couche permettaient bien de tracer des courbes de dosage. Cette étude a été faite à partir de poudres de concentrations connues fabriquées par synthèse. En même temps il était possible de préciser les teneurs limite décelables dans les mêmes conditions d'excitation et en présence des mêmes matériaux de base pour les divers éléments étudiés.

Rappelons tout d'abord les transitions susceptibles de donner les raies les plus sensibles pour ces éléments. On a indiqué dans le tableau n° 1 le doublet émis par l'ion ne possédant plus qu'un électron optique dans l'état de base s lorsque cet électron passe à l'état $p\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$ ainsi que la raie émise par l'ion ayant 2 électrons s dont l'un passe au niveau p.

TABLEAU 1

LONGUEURS D'ONDE DES RAIES SENSIBLES

ÉLÉMENT	GERMANIUM	ARSENIC	SÉLÉNIUM	BROME
Degré d'ionisation	IV	V	VI	VII
λ Å				
$4s\ ^2S_{1/2} — 4p\ ^2P_{3/2}$	1 188,99	967,69	844,15	736,09
$4s\ ^2S_{1/2} — 4p\ ^2P_{1/2}$	1 229,81	1 029,50	886,82	779,58
Degré d'ionisation	III	IV	V	VI
λ Å				
$4s^2\ ^1S_0 — 4sp\ ^1P_1^0$	1 088,46	892,68	759,11	661,05

ÉLÉMENT	ÉTAIN	ANTIMOINE	TELLURE	IODE
Degré d'ionisation	IV	V	VI	VII
λ Å				
$5s\ ^2S_{1/2} — 5p\ ^2P_{3/2}$	1 314,45	1 104,32	951,01	?
$5s\ ^2S_{1/2} — 5p\ ^2P_{1/2}$	1 437,63	1 226,00	1 071,40	
Degré d'ionisation	III	IV	V	VI
λ Å				
$5s^2\ ^1S_0 — 5sp\ ^1P_1^0$	1 251,43	1 042,21	895,20	

Les études analytiques quantitatives concernant ces éléments ont été faites dans les conditions que l'on va indiquer.

On a fabriqué des poudres à base d'oxyde de titane choisi à cause du soin apporté à sa préparation (taux d'impuretés 10^{-7}) (*) et du nombre très réduit de ses raies dans notre région spectrale. Ces poudres formaient deux catégories que nous désignerons par A et B ; les poudres A contenant les éléments de la 4e ligne de la classification (Ge-As-Se-Br) les poudres B ceux de la 5e ligne (Sn-Sb-Te-I). La teneur de chacun des 4 éléments contenus dans une poudre donnée était la même et les différentes poudres ont été faites par divisions successives et de façon à obtenir des concentrations à intervalles réguliers avec une échelle logarithmique. Ces poudres ont été tassées dans le trou axial (3 mm de diamètre) d'électrodes en aluminium pur ne contenant aucun des éléments étudiés.

Les mesures ont été faites sur des spectres de 100 étincelles obtenus avec la source à 3 électrodes décrite récemment [3] qui n'utilise qu'une électrode contenant la poudre (anode) au lieu de deux dans le cas de l'étincelle glissante, et dont le réglage est plus simple. L'anode d'aluminium était terminée par un cône de sorte que la décharge se produisait bien sur la poudre constituant le haut du cône. Cette décharge était celle d'un condensateur de 2 μf chargé sous une tension de 20 kV.

On a obtenu une émission des éléments contenus dans la poudre, assez reproductible d'un spectre à l'autre, chaque dosage étant fait à partir d'une surface renouvelée, le bout de l'électrode contenant la poudre étant limé. Ceci permet de penser que le mode de fabrication des poudres était satisfaisant puisqu'il donne une homogénéité suffisante. On a étudié 10 poudres dans chaque catégorie A et B, la poudre la plus concentrée contenant 1 % de chaque élément, la moins concentrée 0,005 %. Les courbes de dosage correspondent aux poudres les plus concentrées et ne comportent que 8 ou 9 points pour rester dans les limites de densité optique imposées par le film photographique. Sur la figure 1 on trouve les courbes correspondant aux poudres A, sur la figure 2 celles des poudres B ; elles sont obtenues en portant en abscisse le logarithme de la concentration et en ordonnées le logarithme δ du rapport des déviations du microphotomètre pour la raie de l'élément et pour la raie du du titane prise comme étalon. Nous n'avons pu identifier de raies appartenant à l'iode dont les raies sensibles théoriques sont également absentes dans la littérature (voir tableau n° 1). Les courbes sont donc tracées pour chacun des 7 autres éléments et correspondent à la raie de plus courte longueur d'onde (raie la plus intense) du doublet des raies ultimes (courbe en trait plein) et à la raie la plus sensible émise par l'ion de degré d'ionisation inférieur d'une unité (courbe en trait pointillé) et indiquée aussi dans le tableau n° 1. La raie sensible de Se_V n'est pas utilisable car elle est située dans un quintuplet très intense de O_V à 760 Å. On a utilisé comme étalon interne la même raie du titane (indiquée sur la figure) pour le dosage de tous les éléments de chaque catégorie de poudres, afin de comparer la position et la pente respectives des différentes courbes de dosage.

Les courbes de la figure 1 mettent en évidence la variation de la sensibilité de la méthode depuis le germanium jusqu'au brome. La courbe correspondant à la raie du doublet de raies ultimes (trait plein) se déplace vers les grandes valeurs de δ c'est-à-dire les faibles intensités de raies de l'élément à doser depuis le germanium jusqu'au brome ; en même temps la pente diminue et la limite de concentration sur chaque courbe se déplace vers les fortes concentrations. Remarquons que la raie de degré d'ionisation inférieur d'une unité

(*) Nous sommes heureux de remercier ici M. Lapluye du Laboratoire du Magnétisme de Bellevue qui nous a aimablement fourni l'oxyde de titane pur.

est toujours moins intense que la raie ultime sauf pour le brome ce qui indique nettement que l'on arrive avec cet élément à des conditions défavorables pour l'excitation des raies ultimes. On verra plus loin le rôle de l'énergie dépensée en regard de l'énergie d'ionisation et d'excitation de chaque raie.

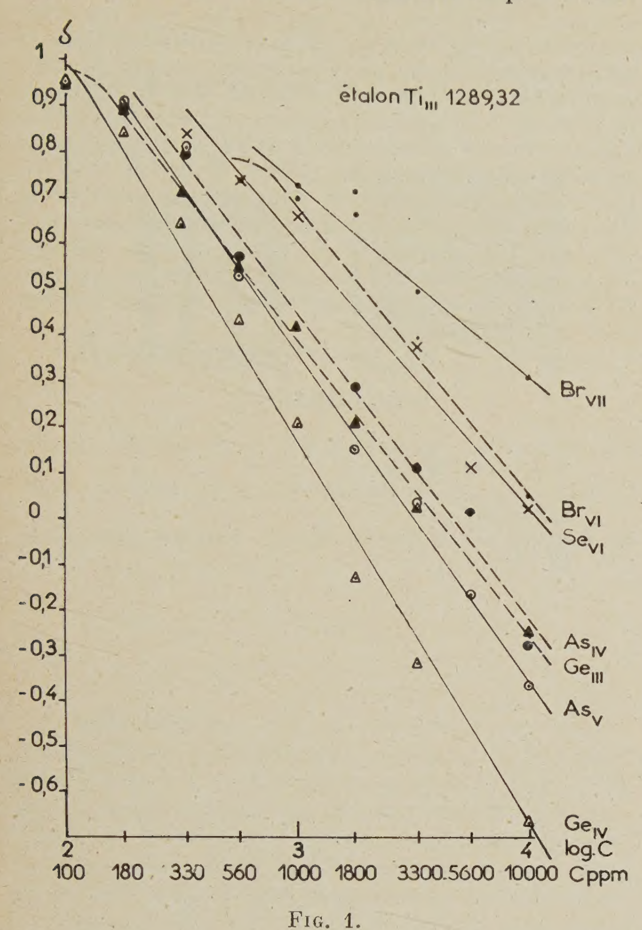


Fig. 1.

Les courbes de la figure 2 (poudres B) accusent une différence beaucoup moins nette entre les 3 éléments étudiés dont les raies sensibles ont des intensités très voisines, permettant d'atteindre par suite, des concentrations limites du même ordre. D'autre part, on n'obtient pas dans tous les essais le même rapport d'intensité entre la raie ultime et la raie de degré d'ionisation inférieur, dont la densité optique est très variable ; on peut avoir pour les 2 raies la même densité optique, donnant des droites de pentes analogues comme pour l'étain et le tellure, ou pour la raie de degré d'ionisation inférieur une densité beaucoup plus faible et variant peu d'où une courbe non rectiligne comme celle de l'antimoine Sb_{IV} sur la figure 2. Cette

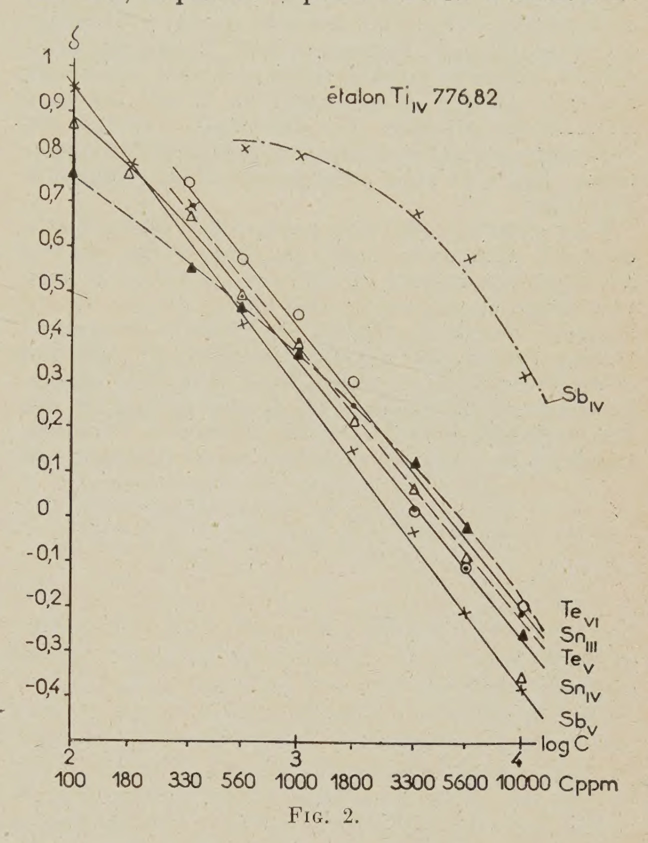


Fig. 2.

TABLEAU 2

Teneurs limites décelables par photométrie photographique

Élément	Germanium	Arsenic	Sélénium	Brome
Raie ultime λ Å	1 188,99	987,69	844,15	661,05
Densité optique	0,19	0,15	0,2	0,22
Concentration ppm	56	56	100	330
Énergie e. v.	68	120	195	280

Élément	Étain	Antimoine	Tellure
Raie ultime λ Å	1 314,45	1 104,32	951,01
Densité optique	0,17	0,22	0,11
Concentration ppm	100	100	100
Énergie e. v.	62	108	170

répartition essentiellement variable de l'énergie entre les deux degrés d'ionisation indique que l'on favorise accidentellement quelquefois l'émission de la raie ultime ce qui donne une courbe de pente plus forte et des points mieux répartis (courbe de dosage avec la raie de Sb_V). Ceci conduit à penser que l'on utilise une énergie instantanée par étincelle voisine d'une valeur critique pour l'excitation des raies indiquées. Il semble qu'en augmentant nettement cette énergie on favoriserait l'émission des raies les plus ionisées, c'est-à-dire des raies ultimes au détriment de la raie de degré d'ionisation inférieur. En diminuant l'énergie les dosages pourraient être faits avec cette dernière (cas du brome figure 1) mais conduiraient à une sensibilité plus faible.

Pour avoir une idée plus précise de la teneur limite décelable nous avons repris les dosages des poudres les moins concentrées en utilisant un temps de pose plus grand et toujours la raie ultime de plus courte longueur d'onde. Le tableau n° 2 indique les concentrations limites pour chaque élément étudié ainsi que la densité optique correspondante pour cette teneur. Les résultats obtenus dans ces dosages portant sur des ions isoélectroniques à 1 électron sur la 4ᵉ ou 5ᵉ couche suggèrent de relier ces variations nettes de sensibilité à l'énergie nécessaire pour obtenir les transitions intéressantes de tels ions. On a indiqué ces énergies en e. V. dans le tableau n° 2 également. Mais si ces différentes énergies d'ionisation sont en relation avec les différences de sensibilité d'un élément au suivant dans la classification, elles ne peuvent rendre compte du comportement essentiellement différent des éléments de la 4ᵉ et de la 5ᵉ ligne. Rappelons en outre que l'on a obtenu avec les éléments de la 3ᵉ ligne une très bonne sensibilité (quelques ppm) pour le soufre et le phosphore dans les poudres et pour le silicium dont les raies ultimes apparaissent dans tout métal commercial dit pur. La probabilité d'ionisation d'un élément donné semble donc être liée non seulement au nombre d'électrons de la couche externe, mais aussi au nombre total d'électrons.

Lettre reçue le 2 mars 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Romand (J.), Balloffet (G.) et Vodar (B.), *Spectr. Acta*, 1958, **13**, 150.
[2] Balloffet (G.) et Romand (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **242**, 1964.
[3] Romand (J.) et Vodar (B.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 732.

Le Gérant : Maurice Blondin. — Dépôt légal : 2ᵉ trim. 1959. — Imp. Taffin-Lefort à Lille (France).